

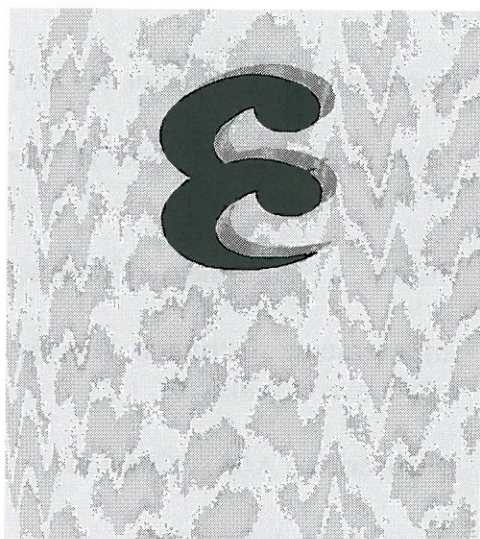
COLEÇÃO *aprender*
CONSTRUÇÃO CIVIL

**LAJES E
ESCADAS
EM
BETÃO ARMADO**

VOL. I

J. S. Brazão Farinha

Edições
E. P. GUSTAVE EIFFEL



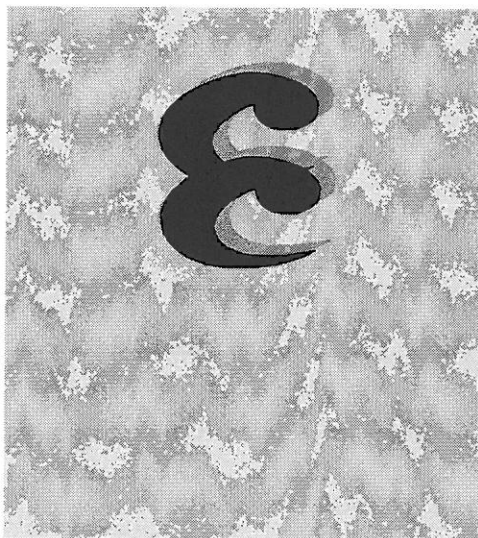
**LAJES E ESCADAS
DE BETÃO
ARMADO
VOLUME I**



COLEÇÃO *aprender*
CONSTRUÇÃO CIVIL

**Títulos da
mesma colecção**

- | | | |
|-----------|--|----------------------|
| 1 | Prontuário para o Director de Obra | J.Paz Branco |
| 2 | Revestimentos e Protecções Horizontais e Verticais em Edifícios | J.Paz Branco |
| 3 | Historial e Finalidades da Construção | J.Paz Branco |
| 4 | Infraestruturas, Estruturas, Alvenarias e Cantarias em edifícios | J.Paz Branco |
| 5 | Dicionário da Arte de Construir | J.Paz Branco |
| 6 | Organização de Estaleiros de Construção Civil | J.Paz Branco |
| 7 | Orçamentação e Estudos Económicos na Construção Civil | J.Paz Branco |
| 8 | Obras de Madeira em Tosco e Limpo na Construção Civil | J.Paz Branco |
| 9 | Manual de Estuques e Modelação | J.Paz Branco |
| 10 | Elementos de Infraestruturas de Urbanização e de Edifícios (águas e esgotos) | Eng.º Assis Paixão |
| 11 | R.S.A. Anotado | Eng.º Brazão Farinha |
| 12 | Lajes e Escadas de Betão Armado | Eng.º Brazão Farinha |



**LAJES E ESCADAS
DE BETÃO
ARMADO
VOL I**

J.S. BRAZÃO FARINHA

**edições
EPGE**

Ficha Técnica

TÍTULO	LAJES E ESCADAS DE BETÃO ARMADO - VOL I
AUTOR	J. S. BRAZÃO FARINHA
EDITOR	COOPTÉCNICA/EPGE
COORDENAÇÃO	GABINETE EDITORIAL EPGE / ANTÓNIO FARIA
CAPA	SANDRA ÁLVARO
ARRANJO GRÁFICO	GABINETE EDITORIAL EPGE / ALEXANDRA RIBEIRO
FOTOCOMPOSIÇÃO	GABINETE EDITORIAL EPGE

Reservados todos os direitos. É proibida a reprodução desta obra por qualquer meio (fotocópia, fotografia, offset, etc.) sem o consentimento escrito dos Editores, abrangendo esta proibição o texto, a ilustração e o arranjo gráfico. A violação destas regras será passível de procedimento judicial, de acordo com o estipulado no Código do Direito de Autor e dos Direitos Conexos.

Queluz, Agosto de 1995 - 1.ª Edição

Esta obra foi executada com apoio do PEDIP - Medida I

ÍNDICE

PREFÁCIO		7
1ª PARTE	ESCADAS CORRENTES	9
CAPÍTULO 1	Escadas de betão armado	11
CAPÍTULO 2	Escadas em consola	25
CAPÍTULO 3	Escadas com degraus apoiados	47
CAPÍTULO 4	Escadas de lanços rectos apoiados pelas extremidades dos lanços	65
2ª PARTE	ESCADAS ESPECIAIS	85
CAPÍTULO 5	Escadas simétricas de lanços rectos com patim intermédio sem apoios exteriores	87
CAPÍTULO 6	Escada ortoquebrada de lanços rectos	117
CAPÍTULO 7	Escadas em caracol	151
BIBLIOGRAFIA		199

PREFÁCIO

Pretende esta publicação apresentar uma sistematização no domínio da determinação dos esforços nas lajes de betão armado, incluindo as rampas e as lajes das escadas, que constituem o 1º volume da obra.

As escadas formam elementos estruturais de que se pode tirar partido, adoptando novas formas, por vezes arrojadas, no sentido da valorização das construções.

A apresentação do problema das escadas de betão armado é abordada em duas partes: escadas correntes e escadas especiais com base na teoria das barras prismáticas, de dimensão longitudinal predominante relativamente às dimensões da secção transversal.

Na primeira parte referem-se as questões que norteiam correntemente a concepção estrutural, salientando a importância da coordenação do processo construtivo com a análise estrutural.

Na segunda parte apresentam-se três tipos de escadas especiais cuja análise é aprofundada exhaustivamente.

No 2º volume apresentam-se tabelas de coeficientes para determinação dos esforços nas lajes rectangulares apoiadas total ou parcialmente no seu contorno ou em apoios pontuais, tendo em consideração os métodos elástico e à ruptura, de abordagem dos problemas de dimensionamento das placas.

O texto é acompanhado de formulário e exemplos de aplicação no sentido de facilitar a expedita compreensão do texto.

O Autor

1.ª PARTE

ESCADAS CORRENTES

CAPÍTULO 1

• Escadas de betão armado

1.1 CONCEITO

A circulação de pessoas entre áreas a diferentes níveis pode efectuar-se utilizando rampas ou escadas fixas; através de sistemas mecânicos, podem utilizar-se tapetes ou escadas rolantes e ascensores.

As escadas podem ser exteriores ou interiores às construções, devendo satisfazer basicamente três funções: ser segura, de utilização cómoda e esteticamente agradável.

Na escolha dos tipos de acessos há que atender às condições de utilização, ao desnível, ao espaço disponível e à segurança dos utilizadores. Há que ter em conta se o acesso é normal ou de emergência, a frequência de utilização, a qualidade e o número dos utilizadores.

As rampas para uso directo de pessoas constituem planos inclinados que, segundo a sua pendente, podem classificar-se do seguinte modo:

- rampas suaves, entre 6° e 10° sobre a horizontal (1:10 a 1:6)
- rampas inclinadas, de 10° a 24° (1:6 a 1:25).

Às rampas usuais nas garagens correspondem as seguintes inclinações para tráfego automóvel: 8,5% (rampa em curva) 10 a 12% (rampa recta normal) e 15% (rampa forte). As rampas em espiral de acesso a locais de estacionamento, com patamar entre a rampa e o estacionamento, têm normalmente inclinações entre 2,5% (rampa exteriores) e 6,3% (rampas interiores).

As escadas são constituídas por uma série de planos horizontais (patamares ou patins) entre os quais se desenvolvem os lanços inclinados formados pelos degraus (Fig. 1.1). Para que a subida não resulte muito fatigante o número de degraus em cada lanço não deve exceder os 12 a 15, recorrendo-se a um ou mais patamares intermédios entre os níveis de partida e de chegada.

Designa-se por “caixa de escada” o compartimento limitado por paredes verticais acompanhando os lanços de escada em toda a sua altura; se os degraus não atingem o centro resulta que o interior da caixa é aberto, constituindo uma área livre em toda a sua altura que se denomina “bomba” (Fig. 1.2b). As escadas exteriores e as interiores que servem espaços amplos são quase sempre rampas abertas, destituídas da caixa.

A iluminação natural de escadas interiores pode fazer-se lateralmente, por meio de janelas, ou superiormente pela abertura de lanternins na cobertura de edifícios, (Fig. 1.1);

este sistema pressupõe a existência de “bomba” para assegurar a chegada da luz.

A iluminação artificial das caixas de escada é sempre necessária, nomeadamente para utilização nocturna. Nos prédios de quatro ou mais pisos exige-se a inclusão de elevadores e portanto de uma rede de distribuição de energia localizada na caixa de escada e que servirá também como fonte da iluminação artificial referida.

Nos edifícios de habitação a inclinação dos lanços das escadas é variável entre 18° e 25°, nas escadas exteriores, e 25° a 45° nas escadas interiores, só se ultrapassando os 40° para escadas de acesso a arrecadações em caves.

As escadas de acesso a instalações para efeito de vistoria e reparação podem ter inclinações entre 45° e 75° sobre a horizontal ou até, no caso das escadas “quebra-costas”, inclinações de 75° a 90°. Estas últimas inclinações utilizam-se em escadas metálicas fixas para acesso na vertical (Figs.1.3 e 1.4) a telhados, depósitos, instalações industriais, acessos a poços e caixa de visita de redes de esgotos, etc., por falta de espaço disponível.

No que se refere a materiais, nos estaleiros de construção recorre-se à madeira, antigamente também muito utilizada em escadas interiores das habitações.

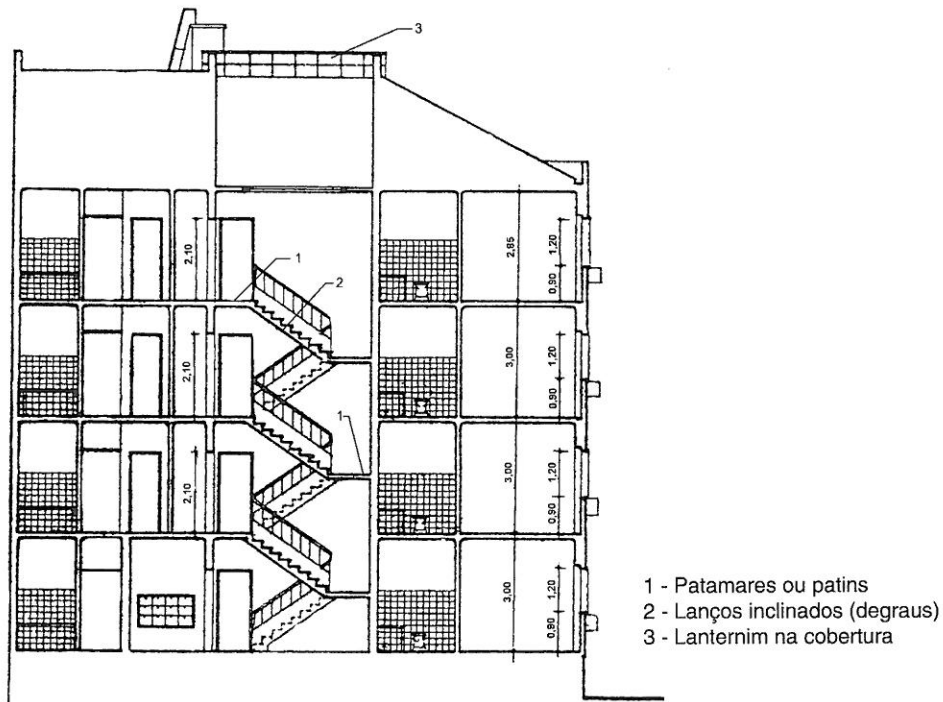


Fig. 1.1 - Corte longitudinal de uma escada de lanços rectos, sendo a caixa iluminada por claraboia

LAJES E ESCADAS DE BETÃO ARMADO



a) Caixa de escada sem "bomba"

b) Caixa de escada com "bomba"

Fig. 1.2 - Disposição dos lanços em caixas de escada

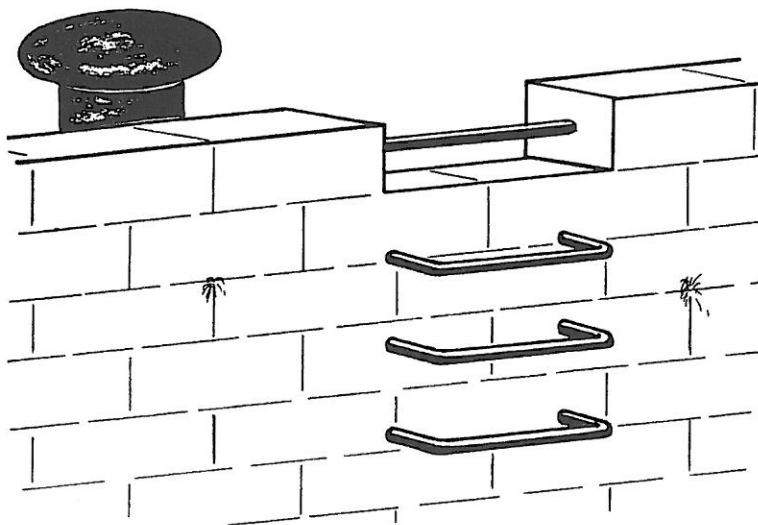


Fig. 1.3 - Escada de degraus de ferro encastrados numa parede de alvenaria

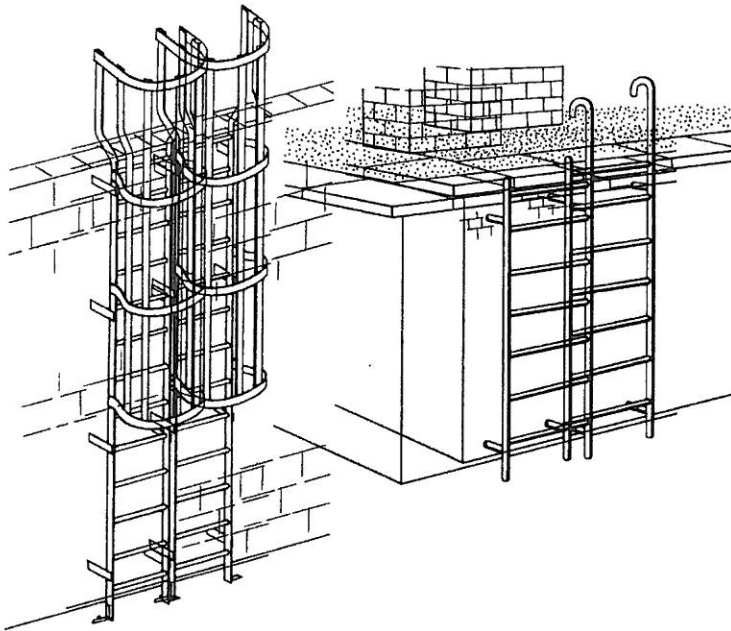


Fig. 1.4- Escadas metálicas fixas para acesso na vertical

Escadas e escadotes portateis de alumínio são muito utilizados para trabalhos localizados de diversas naturezas; recorre-se a escadotes articulados de alumínio, escamoteáveis na abertura da esteira, para o acesso aos sótãos, (Fig. 1.5).

Na construção de edifícios e em instalações exteriores os materiais de construção que usualmente se recorre é o betão armado, utilizando-se excepcionalmente também estruturas metálicas. Uma das vantagens do uso de betão armado é a sua resistência à acção do fogo e, por consequência, o melhor isolamento da caixa de escadas; em caso de incêndio é importante poder utilizar escadas até o último momento. Outra vantagem da utilização deste material é a possibilidade de optar entre grande diversidade de formas, adaptáveis a diversas áreas em planta mesmo que de contorno caprichoso.

Com efeito, embora em regra as caixas de escada correspondam a áreas rectangulares em planta, elas podem ter um contorno poligonal ou em curva, neste último caso de geometria circular ou associando alinhamentos rectos e arcos circulares, em projecção horizontal.

Como elemento acessório, a maioria das escadas são munidas de corrimão longitudinal (Fig. 1.7) com a inclinação da escada e à altura de 90 cm acima da linha dos fochinhos; esse corrimão apoia-se nas paredes ou nas guardas da escada (formada por grades ou balaustres fixos aos degraus que serve para auxiliar as pessoas que nele deslizam a mão).

LAJES E ESCADAS DE BETÃO ARMADO

Além da forma, as escadas podem diferir pelo comportamento estrutural, podendo conceber-se escadas com degraus resistentes encastrados numa das extremidades, simplesmente apoiados ou ainda parcialmente encastrados nos extremos, em paredes ou vigas dispostas longitudinalmente às escadas. O elemento estrutural básico pode ser o degrau (individualmente encastrado numa parede ou numa viga longitudinal) ou o lanço, o qual pode permanecer apoiado nos patamares ou em vigas transversais localizadas nas suas extremidades, ou ainda apoiado em três lados (ao longo de três paredes adjacentes da caixa de escada) e livre ao longo do bordo central (Fig. 1.8).

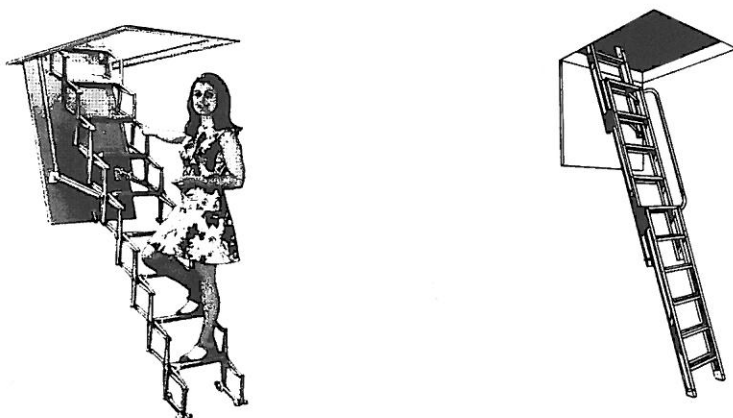


Fig. 1.5 - Escada de liga de alumínio para acesso a sótãos

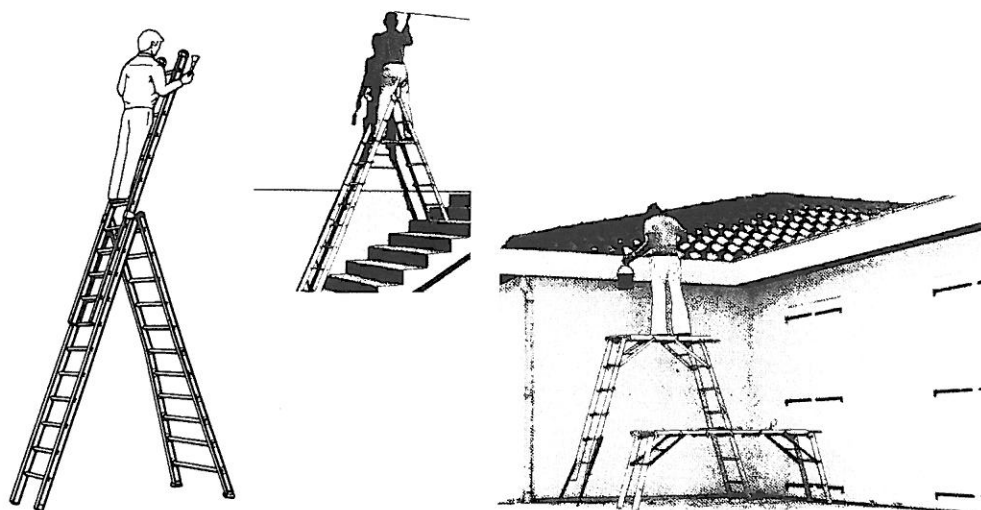


Fig. 1.6 - Escadas para diversos fins

1.2 - DIMENSÕES

A altura “b” dos degraus pode em regra variar dentro dos limites $b = 17,5$ a $19,3$ cm para se conseguir uma escada cómoda para subir; em escadas de escolas e noutras instalações destinadas a crianças, convém que a altura não seja superior a 15 cm.

Quadro 1.1 - Dimensões (cm) dos degraus

Altura b	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
Largura a	40	38	36	34	32	31	28	26	24	22	20	18

De acordo com o Regulamento Geral das Edificações Urbanas, os degraus das escadas das edificações para habitação colectiva devem ter a largura “a” (cobertor) mínima de 0,25 m e a altura (espelho) máxima de 19,3 cm (Fig. 1.9); nos edifícios de três, quatro ou cinco pisos, e sempre que não seja instalado ascensor, a largura (cobertor) mínima deve ser 28 cm e a altura (espelho) máxima de 17,5 cm.

As escadas com degraus de altura superior a 19,3 cm resultam demasiado empinadas; quanto menor for “b”, maior deve ser a largura “a” e vice-versa, adoptando-se a seguinte proporção: $a + 2b = 62$ a 66 cm, em média 64 cm, que corresponde ao passo de um adulto. O passo duma criança é somente 55 cm.

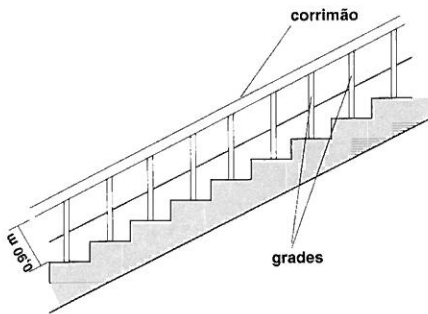


Fig. 1.7 - Exemplo dum tipo de guarda com corrimão

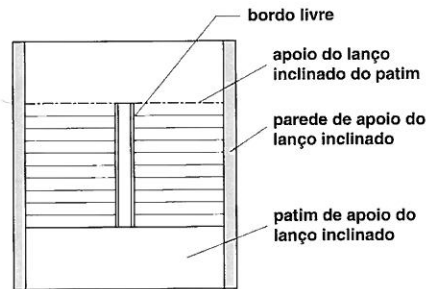


Fig. 1.8 - Localização de elementos estruturais de apoio de lanços de escadas

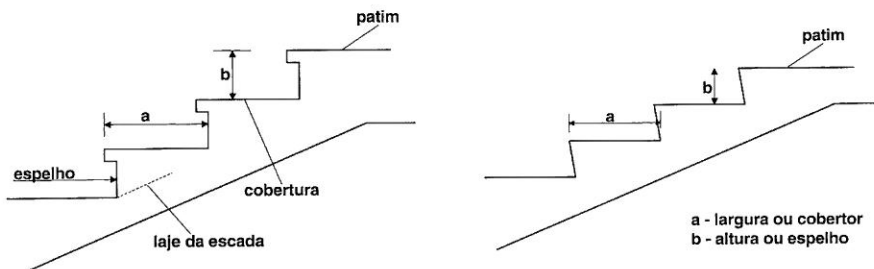


Fig. 1.9 - Dimensões de um degrau

LAJES E ESCADAS DE BETÃO ARMADO

A linha de trânsito, que define o trajecto de quem circula numa escada situa-se a eixo da escada, quando a largura desta for inferior a 110 cm, ou a 50 a 55 cm do bordo do corrimão, no caso contrário; a largura “a” do degrau deve medir-se ao longo desta linha.

A largura mínima das escadas dos edifícios de habitação deve ser a mesma em todo o seu desenvolvimento, de acordo com o indicado no quadro 1.2.

Quadro 1.2 - Dimensões mínima e alturas máximas dos degraus de escadas de edifícios de habitação (*)

Tipos de habitações	Degraus espelho-cobertor	Larguras mínimas (cm)	
		Lanços	Patamares c/ portas de acesso
Escadas de serviço	19,3 x 25	80	
Escadas de moradias unifamiliares		80	
Escadas para habitação colectiva			
a) até dois pisos ou quatro habitações servidas pela mesma escada	19,3 x 25	90	110
b) com mais de dois pisos ou mais de quatro habitações servidas pela mesma escada	17,5 x 28	110	140
c) no caso a) quando os lanços de escada se situam entre paredes	19,3 x 25	110	110
d) no caso c) quando os lanços de escada se situam entre paredes	17,5 x 28	130	140
e) que integrem um corpo de altura superior a 30 m	-	140	150

(*) *Regulamento Geral das Edificações Urbanas Decreto-Lei nº 38 382 de 7 de Agosto 1951 e demais legislação em vigor - Imprensa Nacional - Casa da Moeda, Lisboa 1986.*

As larguras indicadas neste quadro, para os patins com portas de acesso às habitações, têm em conta que elas devem ser iguais às larguras dos lanços, acrescidas da largura do cobertor do degrau do lanço que se inicia para cima do patim.

As dimensões das escadas devem ser proporcionadas à utilização, permitindo o transporte de volumes, sobretudo tratando-se de edifícios comerciais e industriais.



No caso de habitações, as dimensões mínimas para a circulação de móveis são as indicadas na Fig. 1.10; nas Fig. 1.11 e 1.12 indicam-se as dimensões mínimas necessárias à passagem de uma maca com doente.

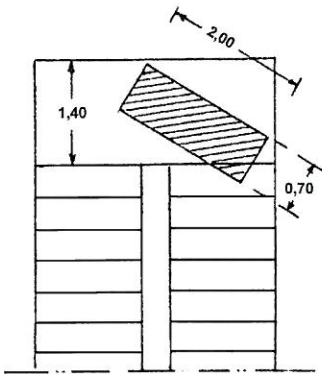


Fig. 1.10 - Dimensões mínimas para o transporte de móveis

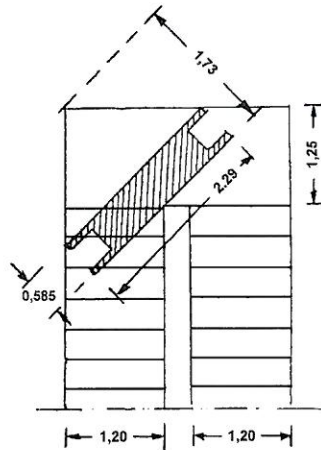
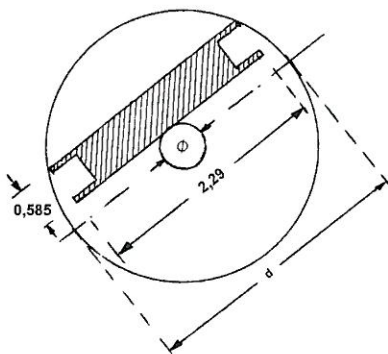


Fig. 1.11 - Dimensões mínimas para o transporte de doente em maca



pilar Ø25, d = 2,70
 pilar Ø30, d = 2,72
 pilar Ø40, d = 2,78

Fig. 1.12 - Transporte de doente em maca numa escada de caracol com pilar central de diâmetro Ø cm

Em locais de trabalho, a largura das escadas deve ser dimensionada de acordo com o previsível número máximo de pessoas presentes nos períodos de maior afluência afim de assegurar a rápida evacuação.

As escadas implantadas em corredores de grande circulação de público devem ter largura igual ao número de faixas de circulação necessárias, correspondendo a largura de 0,75 m por faixa; nestas condições, uma escada pode dar vazão, por faixa, num só sentido, a 2000 pessoas/hora.

Quadro 1.3 - Largura das escadas em locais de trabalho

Número de pessoas presentes	largura m
20 ou menos	1,00
21 a 100	1,50
101 a 300	2,00
301 a 500	2,50

aumentar a largura das escadas de 0,50 m por grupos de 100 pessoas ou fracção para além das 500

1.3 - TRAÇADO

1.3.1 - ESCADAS DE LANÇOS RECTOS

Pode dizer-se de um modo geral que as escadas de lanços rectos são as geralmente adoptadas pela comodidade da sua utilização e economia da construção.

Ao projectar-se uma escada devem desenhar-se em planta e em alçado todos os degraus e patamares, para verificar nomeadamente a altura livre, entre dois lanços sobrepostos, situada acima do focinho dos degraus (Fig. 1.13). Esta distância tem um valor mínimo de 1,90 m, de modo a permitir a passagem de uma pessoa sem ter a sensação de bater com a cabeça; no caso em que se deve assegurar o transporte de cargas, a altura livre em referência não deverá ser inferior a 2,20 m.

Os degraus devem ser numerados, indicando-se nas plantas, com setas, o sentido da subida da escada.

A altura dos degraus deve ser constante nos lanços correspondentes a um mesmo andar; só em certos casos, por exemplo de altura livre muito escassa entre dois lanços sobrepostos, é que podem ser admitidas variações, que devem ser o menos sensíveis que for possível.

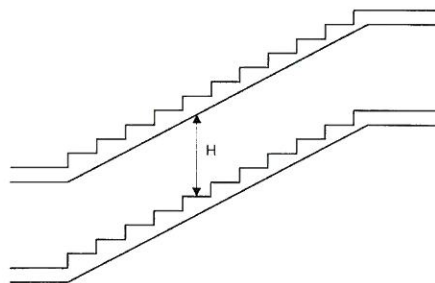


Fig. 1.13 - Altura livre entre lanços

Se o desnível entre andares consecutivos não for igual em todos os casos, mantém-se correspondência em planta de lanços e patamares, variando a altura dos degraus entre lanços correspondentes a cada um dos andares; pode também aumentar-se a largura, afim de reduzir o número de degraus, considerando esta largura ao longo da linha de trânsito.

Neste caso deve começar-se por estudar o lanço de maior número de degraus que serve de base ao desenvolvimento de toda a escada; se os degraus não puderem ter todos a mesma largura, é conveniente marcar na planta a linha de trânsito, ou seja, aquela que as pessoas tendem a seguir, ao utilizar a escada (Fig. 1.14). É sobre esta linha que se faz a divisão dos degraus (pois que, ao longo dela os degraus devem apresentar largura constante ou muito pouco diferente), bem como se assinalam os patamares; é conveniente numerar os degraus e cotar a altura comum dos degraus de um mesmo andar.

1.3.2 - ESCADAS CURVAS

Quando o espaço disponível é demasiado reduzido para a implantação de uma escada de lanços rectos pode haver necessidade de suprimir os patamares intermédios, prevendo degraus no seu lugar, estabelecendo assim lanços únicos entre andares com zonas intermédias de mudança de direcção, (Fig.1.14).

Outra hipótese é a opção por escadas curvas; embora, pela sua graciosidade, permitam um efeito decorativo inegável, a circulação por elas fica dificultada; por tal razão só são adoptadas nos casos em que as escadas de lanços rectos não podem resolver os problemas postos.

Nestes casos os degraus não podendo ter forma rectangular, abrem em leque; assim, entre lanços rectos havendo degraus em leque, há que estabelecer uma transição, ou seja, é necessário compensar os degraus no gaveto entre os dois trechos rectos da escada.

Este balanço tem por objectivo repartir progressivamente a largura dos degraus na transição, para que a escada não se torne desagradável nem perigosa; é conveniente que a largura dos degraus não se reduza para menos de 15 a 18 cm na parte mais estreita, afim de poderem ser utilizados sem dificultar grandemente a circulação. Em caso de impossibilidade pode este valor descer para 6 a 10 cm, no mínimo, mas condicionando a circulação apenas pelo meio da escada.

Existem diversos modos para efectuar uma transição com resultados praticamente coincidentes; no caso de escadas de lanços rectos, traçando as bissectrizes dos gavetos (Fig. 1.14), e fazendo coincidir com elas as arestas ou os meios dos degraus; obtem-se assim uma figura simétrica na zona gaveto, bastando estudar uma das metades.

Mantendo a mesma largura "a" dos degraus obtem-se uma linha de trânsito contínua e regular.

Se pretendermos que as arestas dos focinhos dos degraus sejam convergentes num ponto, verificamos que as larguras dos degraus se reduzem excessivamente e no perfil longitudinal deixa de haver continuidade do lado da bomba, não sendo possível a utilização da escada desse lado enquanto que, pelo contrário, na parte exterior da escada a largura dos degraus torna-se excessiva. Na Fig.1.15 está indicado, a traço interrompido, o traçado dos degraus em planta e na Fig. 1.16 está representado o perfil, antes de se fazer a compensação; do lado da bomba o perfil é constituído por uma linha quebrada.

LAJES E ESCADAS DE BETÃO ARMADO

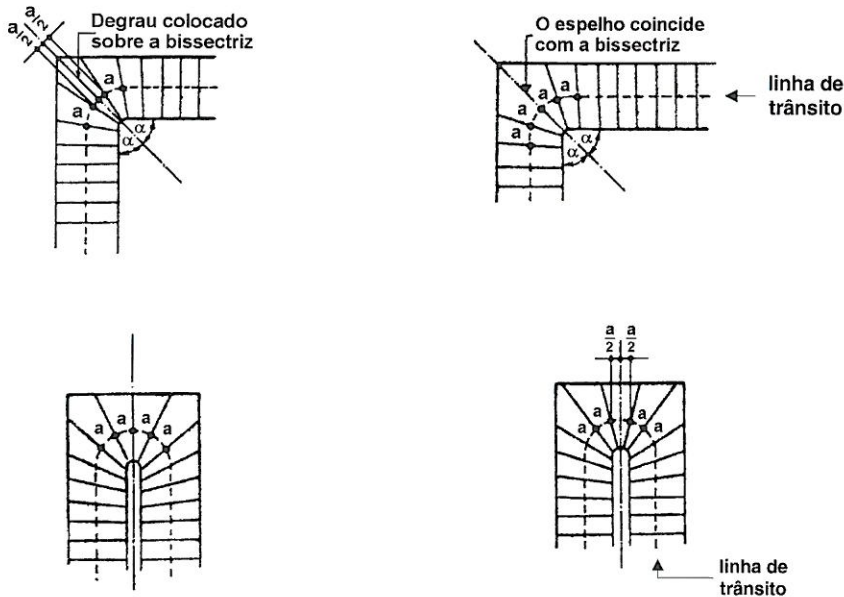


Fig. 1.14 - Escadas de lanços rectos com degraus em leque

Podemos junto da bomba alargar os degraus, de modo que o perfil da escada passe a ser constituído por dois arcos de círculo de raio arbitrário, conforme se desejar, de modo que o perfil se apresente sob a forma de uma curva seguida de uma contra-curva, que define a nova largura dos degraus.

Na Fig. 1.15 apresenta-se a aplicação do atrás referido relativamente ao traçado de uma escada de lanços rectos sem patamar intermédio, com o eixo de simetria longitudinal coincidente com a mediana do degrau 12. Os degraus apoiam-se em três paredes AB, BC e CD da caixa da escada e ou vigas inclinadas dentro da espessura da parede.

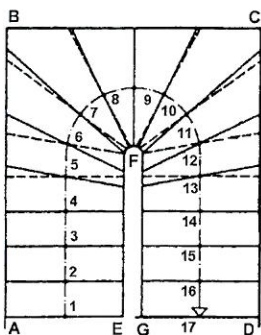


Fig. 1.15 - Compensação da largura dos degraus duma escada em leque

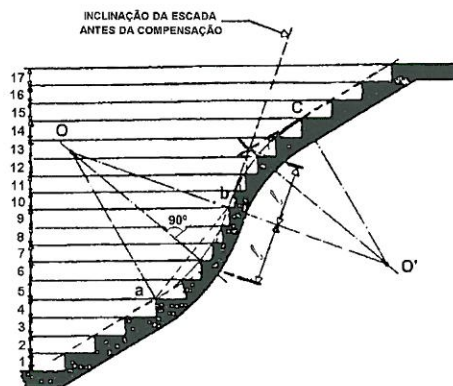


Fig. 1.16 - Compensação do perfil longitudinal duma escada em leque, do lado da bomba

Tomando metade da escada vemos que os degraus 1 a 4 são normais e o perfil longitudinal definido pelas arestas dos focinhos dos degraus é rectilíneo. Este perfil passa a um arco de circunferência \widehat{ab} , tangente em 4 ao segmento 1 - 4, situando-se o centro 0 do arco \widehat{ab} sobre a perpendicular ao meio da corda $labl$.

As abcissas desta curva representam o desenvolvimento, em projecção horizontal, da linha EFG, e as ordenadas, os desníveis em relação ao degrau 4. A partir da referida curva podem determinar-se as dimensões dos degraus após compensação.

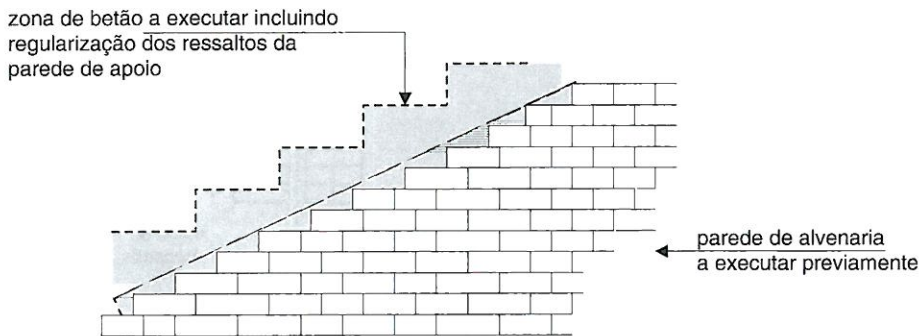


Fig. 1.17 - Apoio de escada de betão armado em parede de tijolo

Nota: Neste caso tem de ser construída a parede (parcialmente) antes da execução do betão armado

1.4 - PROJECTO E CONSTRUÇÃO

Todo o projecto está intimamente ligado com o processo construtivo; quanto a este último as escadas podem ser prefabricadas ou moldadas no local.

A prefabricação simplifica as operações de moldagem e o rigor da execução, uma vez que ela se processa através de uma utilização repetitiva dos moldes, em condições que permitem controlar melhor (relativamente à moldagem no próprio local) o posicionamento das armaduras.

A prefabricação encurta ainda os prazos de execução na medida em que antecipa as moldagem dos elementos, aproveitando tempos mortos das actividades do estaleiro.

Relativamente às sobrecargas de serviço devem considerar-se no dimensionamento das escadas as seguintes:

escadas de edifícios de habitação	3,0 kN/m ²
escadas de edifícios para escritórios	4,0 "
escadas de edifícios com grande afluência de público:	
hospitais, casas de espectáculo, hotéis	5,0 "

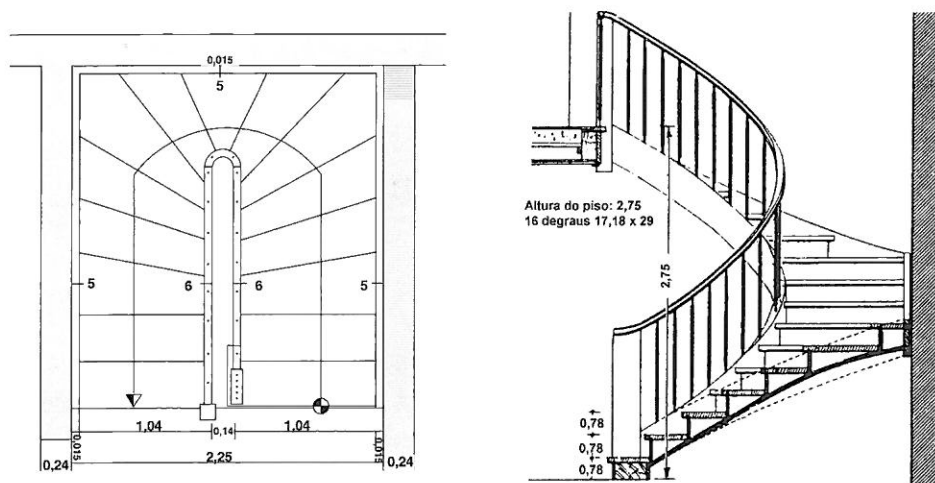


Fig.1.18 Desenvolvimento de escada sem patamar intermédio

Antigamente as dificuldades de construção impuseram escadas com caixa fechada, pela facilidade de apoio dos degraus; com o betão armado tornou-se possível aligeirar as estruturas das escadas generalizando o recurso a lajes não vigadas, aumentando os vãos, dispensando em muitos casos as caixas da escada, possibilitando espaços mais amplos, facilitando a iluminação natural durante o dia ou o recurso à iluminação artificial permanente.

CAPÍTULO 2

• Escadas em consola

2.1 GENERALIDADES

As escadas em consola podem assumir diferentes aspectos, podendo ser armadas no sentido longitudinal ou transversal, relativamente à direcção em que se desenvolve; a escada pode ser de lanços rectos ou não, de degraus maciços e solidários ou isolados entre si; neste último caso os degraus são constituídos por pequenas placas independentes formando degraus com ou sem espelho, sendo a altura dos degraus a distância vertical entre placas, depois de colocadas na sua posição (Fig. 2.1).

O elemento de apoio, em regra formado por uma parede de betão armado ou de alvenaria, deve assegurar o encastramento da consola, indicando-se na figura 2.3 um esquema das reacções de apoio. No caso de apoio dos degraus em viga longitudinal, a escada transmite momentos de torção; o encastramento da referida viga tem de resistir a esforços de flexão e torção nas suas extremidades. Para a determinação dos esforços pode recorrer-se aos quadros 2.1 a 2.3 apresentados no final do Capítulo.

No caso de apoio em parede de betão armado a escada transmite momentos flectores a um determinado nível da parede ou a alturas variáveis. Tratando-se de um encastramento em parede de alvenaria, Fig.2.3, o equilíbrio é determinado pela força G transmitida pela parede sobrejacente, de espessura “ e_1 ” a qual actua centrada com a parede. A consola transmite um momento M e uma força V , esta última actuando a $1/3$ da entrega “ a ” da consola na parede, a qual reage com uma força $N = (V + G)$ aplicada à distância “ e ” do eixo da parede que suporta a consola, que se determina pela equação

$$e = \frac{1}{V + G} \left[M + \frac{V}{6} (3e_2 - 2a) - \frac{G}{2} (e_2 - e_1) \right]$$

Para além da determinação das tensões nas diversas secções transversais dos elementos, há que verificar as condições de equilíbrio exterior ao derrubamento, $M_{st} \geq M_{dst}$ sendo:

M_{st} - Momento das forças estabilizadoras

M_{dst} - Momento das forças destabilizadoras

tomando para charneira a aresta da parede que se projecta em 0, Fig. 2.2.

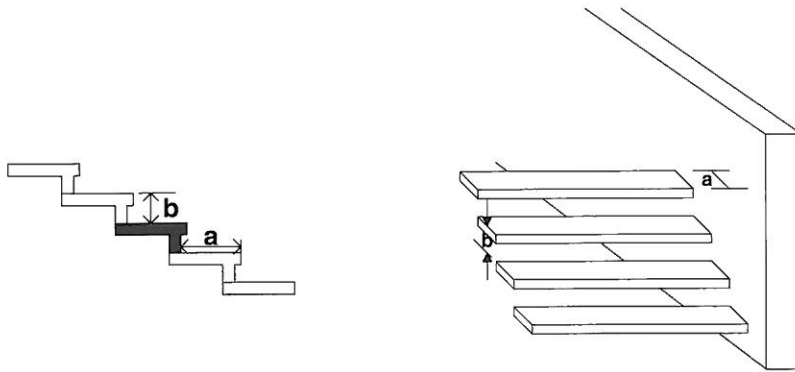


Fig. 2.1 - Escada constituída por degraus isolados, com ou sem espelho, encastrados em parede

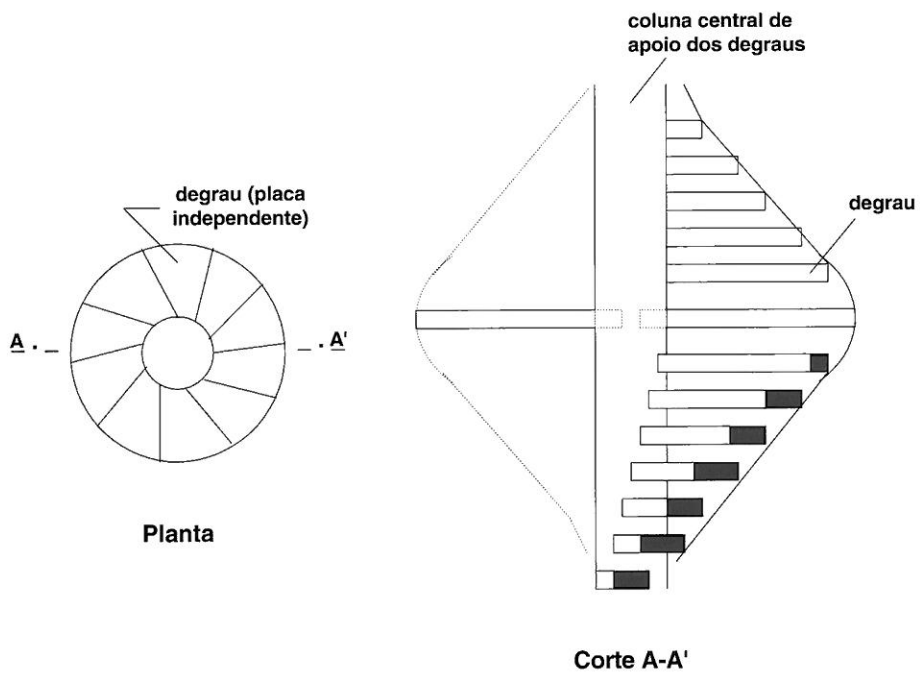


Fig. 2.2 - Esquema duma escada com degraus em consola

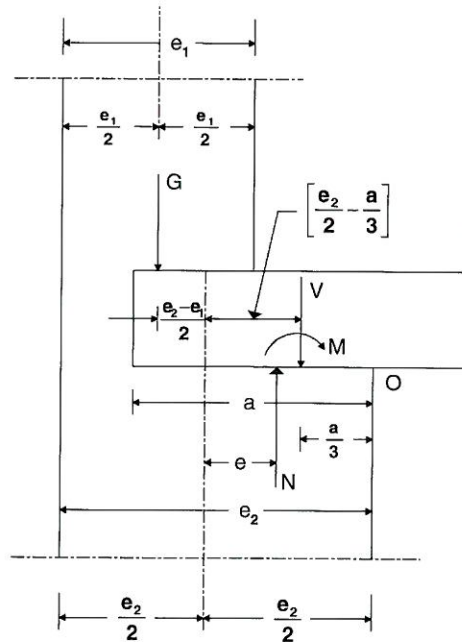


Fig. 2.3 - Condições de encastramento numa escada em consola numa parede de alvenaria

2.2 - ESCADAS ARMADAS LONGITUDINALMENTE

Neste caso a escada é uma consola no sentido do maior vão e apoia-se em elemento de fundação em parede ou em viga horizontal de extremidade, disposta perpendicularmente à direcção do vão.

Apresentam-se seguidamente dois exemplos: o primeiro constituído por uma escada de um só lanço, encastrado numa viga, que faz parte da estrutura de um edifício, ao nível do piso da entrada, Figs 2.4 e 2.5; o segundo constituído por uma escada de dois lanços, sendo o primeiro encastrado na sapata da fundação, Figs 2.6, 2.7 e 2.8. No 1º exemplo toda a secção dos degraus é resistente, o que não sucede no 2º caso, constituído por lanços com degraus maciços, solidarizados por uma laje inferior. Neste último caso a secção resistente a ter em conta coincide com a secção mínima, que corresponde à zona rectangular (laje) que se situa por baixo dos prismas triangulares que formam os degraus e estabelece a interligação entre estes.

Exemplo 2.1 - Dimensionamento de um lanço de escada em balanço de perfil ortoquebrado com cinco degraus 16 x 30 cm, com 1,0 m de largura, encastrado numa viga da

estrutura do piso de um edifício, tendo os elementos resistentes a espessura de 10 cm, no tosco, Fig. 2.5.

Cargas actuantes

peso próprio	$g = 0,10 \times 25,0$	$= 2,5 \text{ kN/m}^2$
revestimento		$= 1,0$
sobrecarga	q	$= 3,0$
	$g+q$	$6,5 \text{ kN/m}^2$

$$M_{2-1} = \frac{6,50 \times 1,50^2}{2} = 7,30 \text{ kN.m} \quad ; \quad V_2 = 6,5 \times 1,5 = 9,75 \text{ kN}$$

na Fig.2.4 estão representados os esforços que conduzem às dimensões indicadas na Fig.2.5. A armadura de tracção é constituída por 4 estribos $\varnothing 6$ por degrau e a armadura de flexão por 10 $\varnothing 10$ longitudinais, convenientemente dobrados; afim de solidarizar todas estas armaduras utilizam-se 6 $\varnothing 6$ por degraus, dispostos segundo a largura destes, transversalmente à escada, obtendo-se deste modo um conjunto suficientemente rígido para execução prévia, permitindo o transporte em bloco e a colocação na sua posição definitiva.

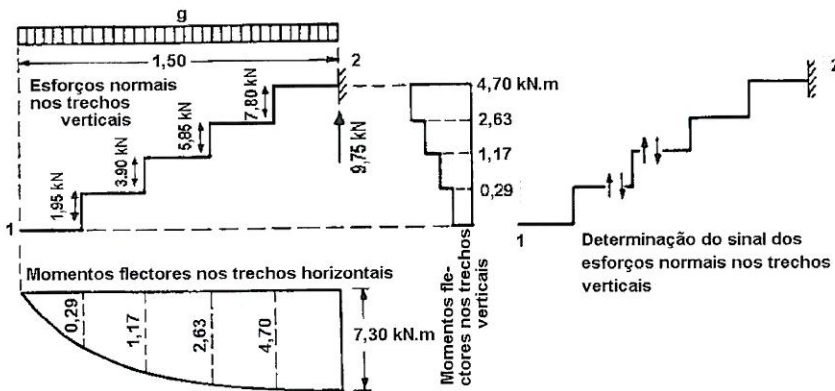


Fig.2.4 - Diagramas de esforços de flexão ao longo do vão da escada em consola e dos esforços de tracção nos trechos verticais

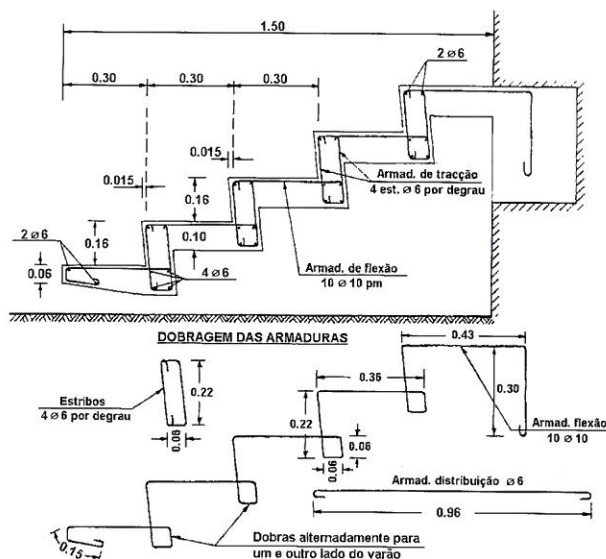


Fig.2.5 - Escadas em balanço - Exemplo 2.1 - Disposições construtivas das armaduras

No que refere à viga de apoio - neste caso disposta horizontalmente - ela está sujeita à flexão e à torção cujos respectivos esforços podem ser determinados a partir do quadro 2.3.

Exemplo 2.2 - Escada de dois lanços em consola, de largura constante de 1,00 m, com patim intermédio, apoiada em fundação directa, conforme esquema indicado na Fig. 2.6. A espessura dos dois patins é constante, respectivamente 0,20 m e 0,40 m, para o patim superior e inferior, e a espessura das lajes sob os degraus é variável entre 0,20 e 0,30 m no segundo lanço e constante, 0,30 m no primeiro lanço, Figs 2.6 e 2.7; $a = 0,30$ m; $b = 0,175$ m.

A estrutura é isostática de espessura variável; para efeito da determinação dos esforços podem substituir-se as acções distribuídas ($g + q$ kN/m²) por forças concentradas equivalentes, F_1, F_2, \dots, F_6

O lanço superior entre o patamar intermédio e a extremidade livre 1, está sujeita à flexão simples pelo esforço transversal e momento flector; a secção média do patamar está sujeita a esforço transversal V e momento de torção T .

Todo o lanço inferior é solicitado à flexão simples como o 2º lanço.

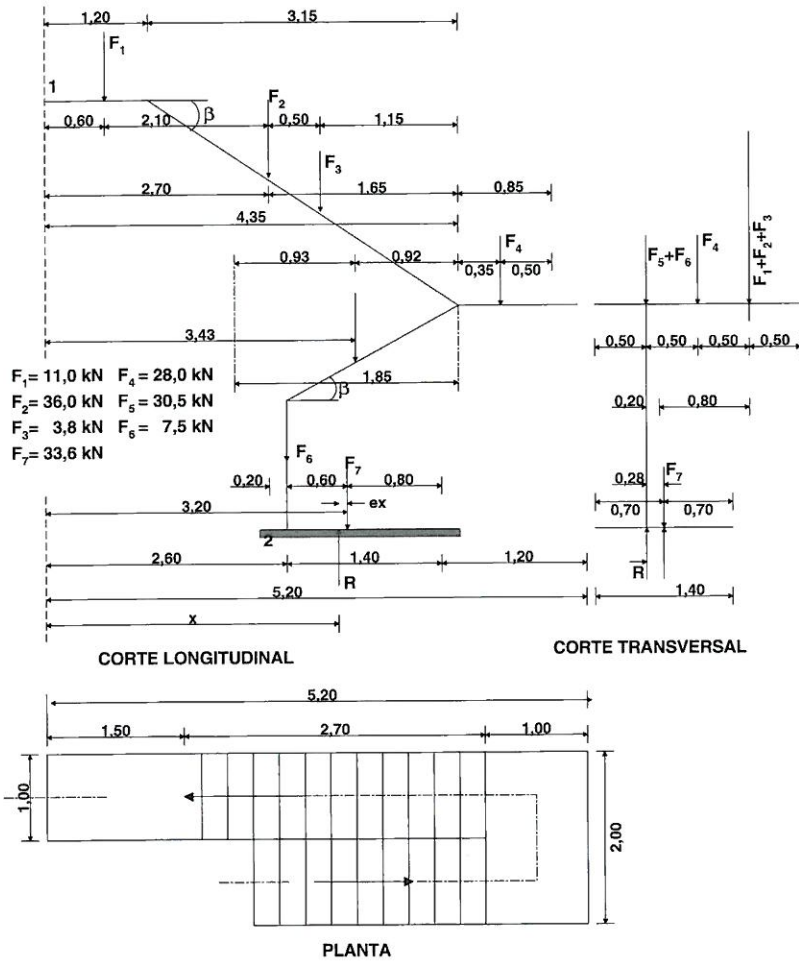


Fig. 2.6 - Esquema dos cortes longitudinal e transversal e planta de uma escada de dois lanços em consola

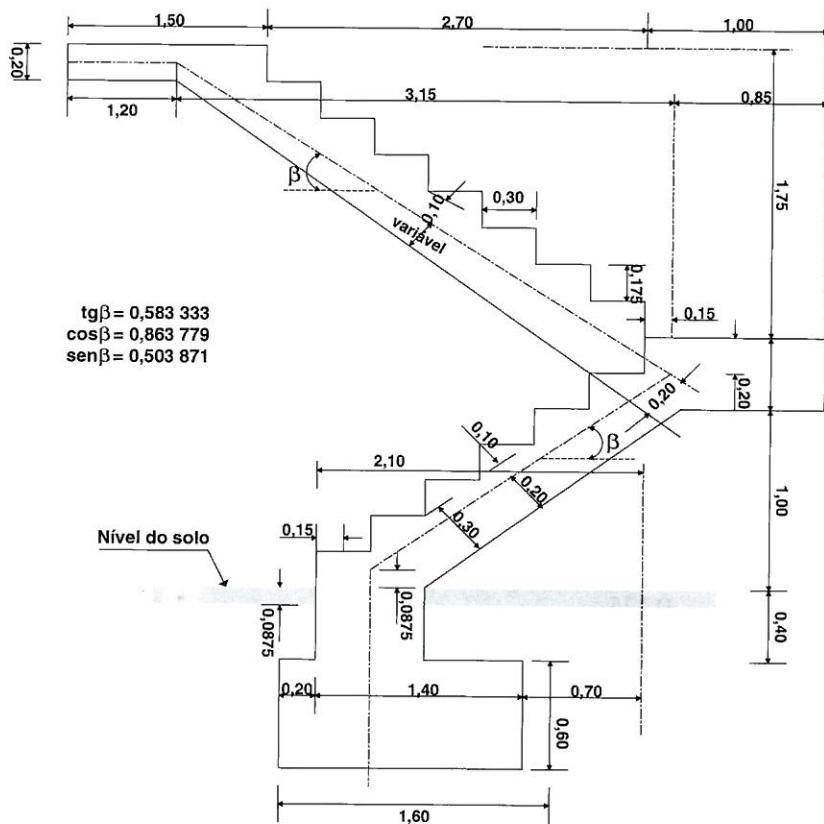


Fig. 2.7 - Geometria da escada de dois lanços em consola

Começamos por avaliar as forças F_1, F_2, \dots, F_6 equivalentes às acções actuantes, fazendo a análise das condições de fundação, considerando a actuação das acções permanentes, g , e sobrecarga, q , nos dois lanços e patamares. Para isso há necessidade de elaborar o esquema de estrutura segundo as direcções longitudinal e transversal, Fig.2.6.

1. Acções

a) Trecho 1(patamar superior da escada)

Espessura do patim: 0,20 m
Largura: 1,00 m

Peso próprio	$g = 0,2 \times 25$	$= 5,0 \text{ kN/m}^2$
Revestimentos		1,0
Sobrecarga	$q =$	3,0
	$g+q =$	$\frac{9,0 \text{ kN/m}^2}{\quad}$

$$F_1 = 9,0 \times 1,20 \times 1,00 = 11,0 \text{ kN}$$

b) Trecho 2 (2º lanço da escada)

Espessura do lanço na extremidade superior 0,20 m
Largura 1,00 m

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{0,175}{0,30} = 0,583 \ 333 ; \ \cos\beta = 0,863 \ 779$$

Peso próprio $\left(\frac{0,20}{0,863 \ 779} + \frac{0,175}{2}\right) \times 25,0$ 8,0 kN/m²

Revestimento 1,0
Sobrecarga 3,0

$$g'+q' = \frac{12,0 \text{ kN/m}^2}{\quad}$$

$$F_2 = 12,0 \times 3,0 \times 1,00 = 36,0 \text{ kN}$$

Carga triangular por aumento da espessura da laje $\frac{0,1 \times 1,0 \times 25,0}{0,863 \ 779} = 2,9 \text{ kN}$

$$F_3 = \frac{2,9}{2} \times 3,0 \times 1,00 = 4,4 \text{ kN}$$

c) Trecho 3 (patamar intermédio)

Espessura do patamar	0,40 m	
Largura	1,00 m	
Peso próprio	$g'' = 0,40 \times 25,0 =$	10,0 kN/m ²
Revestimentos		1,0
Sobrecarga	$q'' =$	3,0
	$g'' + q'' =$	<u>14,0 kN/m²</u>

$$F_4 = 2,0 \times 14,0 \times 1,00 = 28,0 \text{ kN}$$

d) Trecho 4 (1º lanço, 0,30 m de espessura) 12,0 kN/m²

$$\frac{0,10 \times 25,00}{0,863\ 779} = 2,9$$

$$g''' + q''' = \underline{14,9 \text{ kN/m}^2}$$

$$F_5 = 14,9 \times 2,1 \times 1,00 = 31,3 \text{ kN}$$

e) Parede de fundação

$$F_6 = 0,60 \times 0,50 \times 1,00 \times 25,0 = 7,5 \text{ kN}$$

f) Sapata de fundação

$$F_7 = 1,60 \times 1,40 \times 0,6 \times 25,0 = 33,6 \text{ kN}$$

Temos $\sum F = 151,8 \text{ kN}$, sendo:

$$F_1 = 11,0 \text{ kN} \quad F_2 = 36,0 \text{ kN} \quad F_3 = 4,4 \text{ kN} \quad F_4 = 28,0 \text{ kN}$$

$$F_5 = 31,3 \text{ kN} \quad F_6 = 7,5 \text{ kN} \quad F_7 = 33,6 \text{ kN}$$

Seguidamente determinam-se as excentricidades “e” da reacção nas direcções longitudinal e transversal da escada; no 1º caso tomar o eixo de referência que passa pela extremidade livre (secção 1) do 2º patim e no 2º caso o que passa pelo centro da sapata de fundação no sentido transversal, Fig.2.6.

$$x = \frac{1}{151,4} \left[\left(11,0 \times 0,60 + 36,0 \times 2,70 + 4,4 \times 3,20 + 28,0 \times 4,70 + \right) \right] = 2,92 \text{ m}$$

$$e_x = 3,20 - 2,92 = 0,28 \text{ m} = 280 \text{ mm}$$

$$e_z = \frac{1}{151,8} \left[(11,0 + 36,0 + 4,4) \times 0,80 + 28,0 \times 0,30 - \right. \\ \left. - (31,3 + 7,5) \times 0,20 \right] = 0,325 \text{ m} = 325 \text{ mm}$$

As pressões de contacto no terreno são então,

$$\frac{p_1}{p_2} = 1000 \frac{150,4}{1,6 \times 1,4 \times 10^6} \left(1 \pm \frac{6 \times 280}{1600} \pm \frac{6 \times 325}{1400} \right) = \begin{cases} 0,23 \text{ N / mm}^2 \text{ (MPa)} \\ -0,10 \text{ " } \end{cases}$$

Os valores anteriores devem ser corrigidos através da repetição do cálculo, para ter em conta o valor negativo da pressão de contacto.

O momento e as armaduras (B225; A40N), na secção de ligação do 2º lanço da escada ao patim intermédio são os seguintes:

$$M = 11,0 \times 3,75 + 36,0 \times 1,65 + 4,4 \times 1,15 = 105,3 \text{ kN.m}$$

$$A = 18,6 \text{ cm}^2 - 10\phi 16 \text{ (} 20,1 \text{ cm}^2 \text{)}$$

Os momentos flector e de torção no patim intermédio são os seguintes:

$$M = 105,3 - \frac{14,0 \times 0,85}{2} = 100,3 \text{ kN.m}$$

$$V = 11,0 + 36,0 + 4,4 + 14,0 = 65,0 \text{ kN}$$

$$T = 11,0 \times 4,10 + 36,0 \times 2,00 + 2,9 \times 1,50 = 121,5 \text{ kN.m}$$

Neste patim são necessárias armaduras constituídas por estribos fechados ancorados às armaduras longitudinais de flexão, para a resistência simultânea ao esforço transversal e ao momento de torção.

O momento flector M na secção da base do 1º lanço da escada toma o valor:

$$M = (11,0 + 36,0 + 4,4) \times 1,85 + 28,0 \times (1,85 + 0,35) + 14,0 \times 2,10 \times 0,93 - 10,0 = 174,0 \text{ kN.m}$$

pelo que se podem manter no 1º lanço a espessura e as armaduras de flexão do 2º lanço.

O momento de torção e o esforço transverso na mesma secção têm por valor:

$$T = (11,0 + 36,0 + 4,4 + 14,0) \times 0,50 = 32,7 \text{ kN.m}$$

$$V = 11,0 + 36,0 + 4,4 + 28,0 + 31,3 = 110,7 \text{ kN}$$

sendo necessário utilizar estribos ligados às armaduras longitudinais.

Na Fig. 2.8 apresenta-se um esquema da disposição das armaduras de flexão e torção.

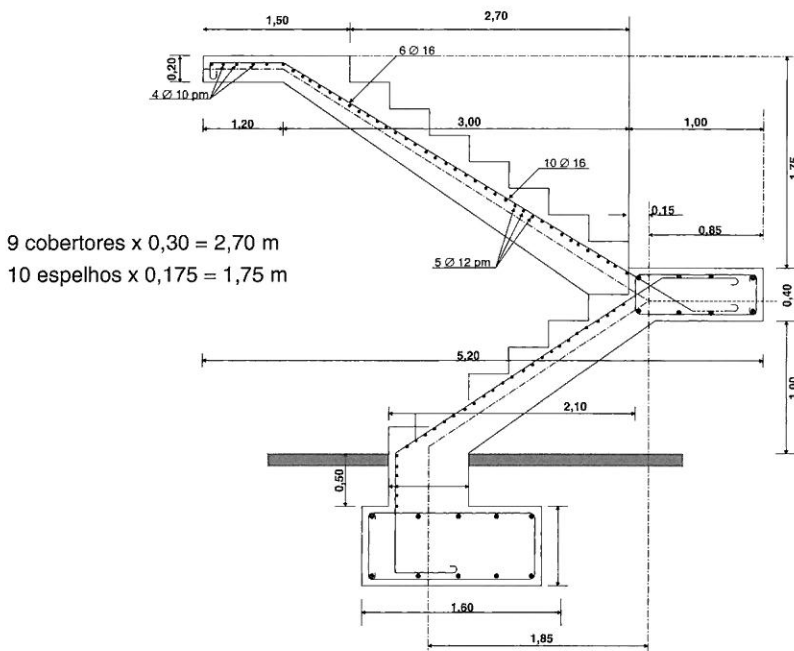


Fig.2.8- Disposição das armaduras da escada do exemplo 2.2

2.3 - ESCADAS ARMADAS TRANSVERSALMENTE

É a situação mais corrente de escadas em consola. Neste caso os degraus encastram-se em paredes ou então em vigas longitudinais inclinadas; ao contrário das anteriores, toda a secção dos degraus contribui para a resistência da escada, Fig.2.9. O dimensionamento efectua-se para um momento flector M de eixo horizontal, actuando numa secção trapezoidal, o qual se localiza através da determinação da posição da linha neutra; no entanto, dada a relativa dificuldade desse procedimento face ao volume de

betão de cada degrau e ao pequeno valor das cargas e dos vãos, é habitual considerar na prática, cada degrau isoladamente constituído por um elemento de laje de secção rectangular de espessura.

$$e_m = \frac{e' + b}{2}; \quad e' = e / \cos \beta$$

que transmite ao apoio forças e momentos, e neste origina reacções, de distribuição contínua, ao longo do perímetro do apoio dos degraus.

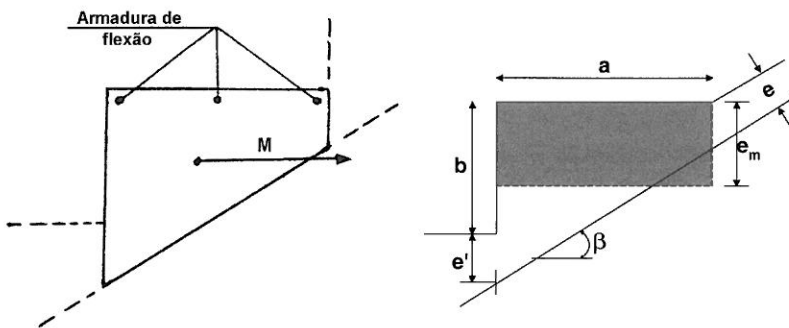


Fig. 2.9 - Posicionamento das armaduras e dimensões correntes de escadas com degraus maciços em consola

Exemplo 2.3 - Escada em consola de uma viga longitudinal inclinada, (longarina), encastrada à torção nos pilares 1 e 2 (Fig.2.10).

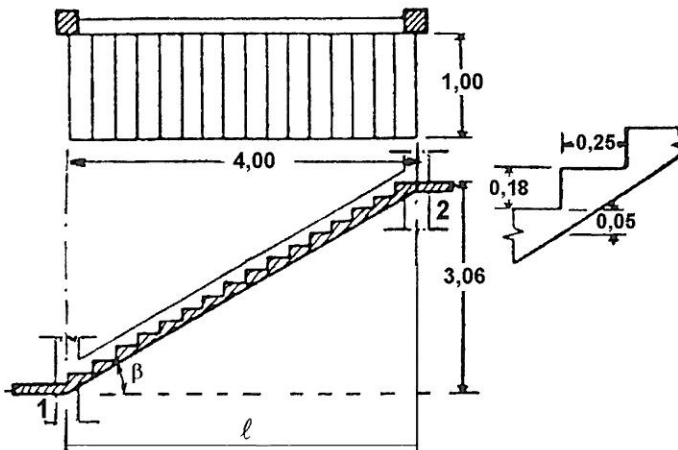


Fig. 2.10 - Escada em consola de uma viga inclinada 1, 2

Acções actuantes:

$$\text{peso próprio } \left(0,05 + \frac{0,18}{2}\right) \times 25,0 = 3,5 \text{ kN/m}^2$$

$$\text{revestimento} = 0,5$$

$$\text{sobrecarga} = 3,0$$

$$g+q = 7,0 \text{ kN/m}^2$$

parapeito de tijolo a meia vez
de 1,00 m de altura F = 2,1 kN

Momento M (de eixo horizontal) distribuido ao longo do apoio dos degraus (longarina) em consola, por metro de projecção horizontal:

$$M = -\left(\frac{7,0 \times 1,00^2}{2} + 2,1 \times 1,00\right) = -5,6 \text{ kN.m}$$

Esforço transverso no apoio da consola (longarina) transmitido pelos degraus:

$$V = (7,0 + 2,1) \times 1,0 = 9,1 \text{ kN / m}$$

A viga longitudinal, além do seu peso próprio está sujeita a uma força uniformemente distribuida, vertical, transmitida pela consola, de 9,1 kN; além disso a consola transmite também um momento uniforme de eixo horizontal, já que as forças actuantes na consola são verticais.

Este momento tem duas componentes, uma segundo o eixo longitudinal da referida viga (momento de torção T) e outra perpendicular a esse eixo (momento flector M') situada, como a anterior, no plano médio longitudinal de simetria da viga inclinada, Fig.2.11.

O momento de torção T é dado pela expressão:

$$T = M \cos \beta \text{ kN.m / m}$$

correspondendo nos apoios da viga inclinada momentos de torção iguais entre si, cada um deles com o valor $T\ell/2$ aplicado à viga.(vidé quadro 2.3)

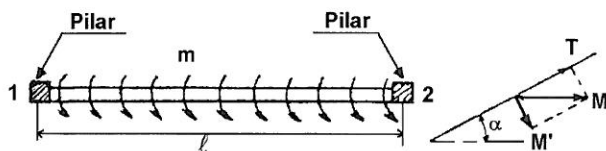


Fig. 2.11 - Momentos flector e torsor na longarina

$$T_{1-2} = -T_{2-1} = \frac{T\ell}{2} = \frac{M \cos \beta \cdot \ell}{2} = -\frac{5,6 \times 4,0 \times 0,25}{2\sqrt{0,18^2 + 0,25^2}} = -9,1 \text{ kN.m}$$

sendo ℓ o vão da viga em projecção horizontal e o ângulo de inclinação da escada, Fig.2.10.

Quanto à componente $M' = M \sin \beta$ kN.m/m trata-se de um momento flector, de distribuição contínua e uniforme (flexão lateral) ao longo de ℓ , que não produz esforços na viga inclinada. Com efeito, para a viga simplesmente apoiada ou encastrada as reacções de apoio são

$$V_1 = -V_2 = \frac{M\ell}{\ell} = M$$

sendo o momento flector em qualquer secção S da viga, de abcissa x

$$M_x = V_1x - Mx = Mx - Mx = 0 \quad (\text{ausência de esforços de flexão}).$$

Só existem esforços de flexão lateral não nulos na viga inclinada para a hipótese de sobrecarga actuar apenas sobre uma parte da escada. Não tem interesse essa hipótese dado o pequeno valor destes momentos e a grande resistência da escada à flexão lateral, devido à existência dos próprios degraus.

A disposição das armaduras é indicada na Fig. 2.12.

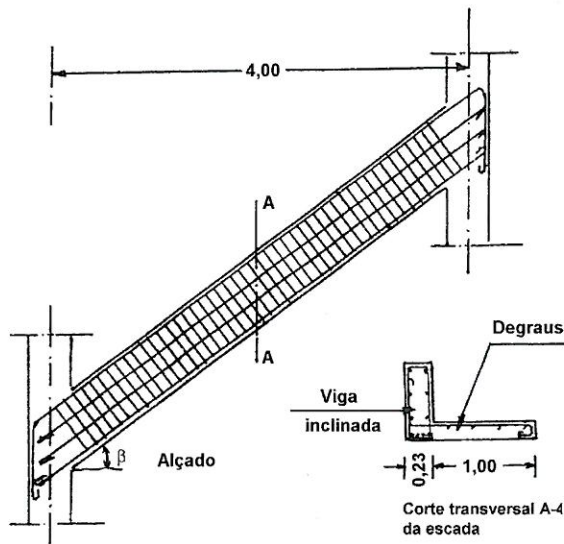


Fig.2.12 - Disposição das armaduras dos degraus e da viga inclinada

Exemplo 2.4 - Escada, para acesso do solo ao nível utilizável mais baixo de uma estrutura, constituída por longarina central e degraus em consola para os dois lados da viga, Fig.2.13.

A longarina apoia superiormente numa viga horizontal e inferiormente na sapata de fundação, através dum pilar intermédio.

A abordagem deste exemplo é semelhante à do anterior; no que se refere à longarina central, o seu dimensionamento deve considerar duas hipóteses:

- sobrecarga geral, q , aplicada sobre toda a área de todos os degraus da escada para dimensionamento da viga à flexão;
- sobrecarga, q , aplicada apenas em metade da área dos degraus da escada, situação mais desfavorável para o dimensionamento da viga à torção.

Os momentos flectores e torçores existentes na viga de suporte dos degraus dão origem apenas a momentos flectores no pilar intermédio de apoio e a momentos flectores e torçores na viga superior de apoio.

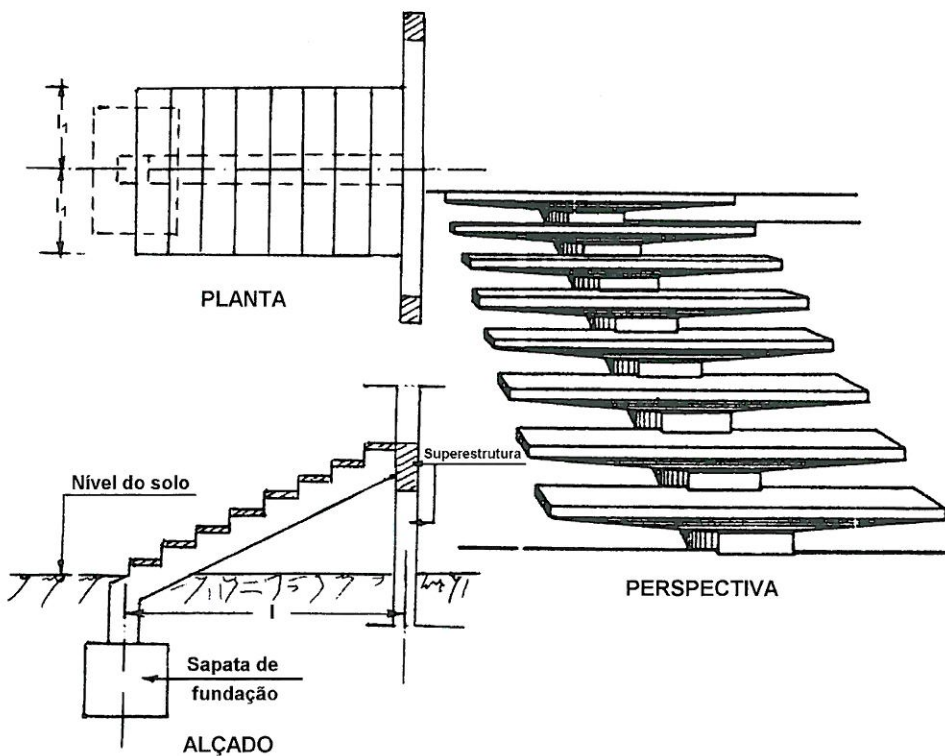


Fig.2.13 - Escada com degraus em consola de longarina central

Os degraus são constituídos por lajetas, de espessura constante ou variável, encastradas na longarina central através de dois estribos, cada um deles dimensionado

para resistir à força de tracção F dada por $F = \frac{q\ell_1^2}{2a}$ sendo “a”, a largura da escada ver

Fig.2.14. Esta força F aplica-se a cada um dos estribos consoante a sobrecarga actua isoladamente do lado esquerdo ou do lado direito da viga central.

Exemplo 2.5 - Escada constituída por uma parede central de betão armado, com degraus em consola para um e outro lado da parede, em lanços alternados; patamares em consola dos lanços, ficando salientes para o exterior dos topos da parede central, Fig.2.15.

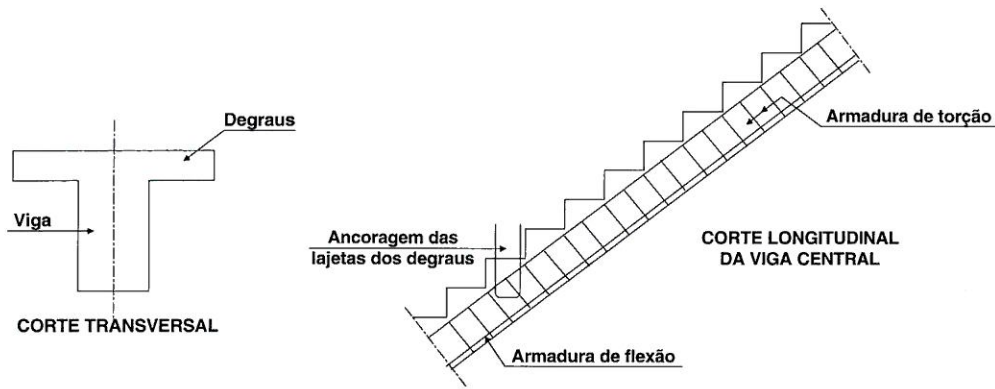


Fig.2.14 - Disposição das armaduras da escada com longarina central (Exemplo 2.4)

Neste caso os degraus são dimensionados como no exemplo 2.3 e os patamares são dimensionados como elementos em consola. Resulta daqui a conveniência de prever espessuras mínimas nas lajes dos patamares.

A parede central da escada é dimensionada por faixas verticais de 1 m de largura, em consola, encastradas na base e solicitadas à flexão composta (cargas verticais e momento M). Considerando as acções mais desfavoráveis devidas à inserção dos lanços e ao posicionamento da sobrecarga (toda do mesmo lado da parede central de apoio), verificamos que o valor máximo do momento flector, numa secção entre andares da referida faixa vertical é:

$$M = \left(g + \frac{n}{2}q \right) \frac{\ell_1^2}{2} \text{ kN.m / m}$$

sendo ℓ_1 o vão dos degraus em consola, $\frac{n}{2}$ o número de andares sendo n o número de

LAJES E ESCADAS DE BETÃO ARMADO

lanços da escada, os degraus são solicitados por g kN/m² (ação permanente) e q kN/m² (sobrecarga).

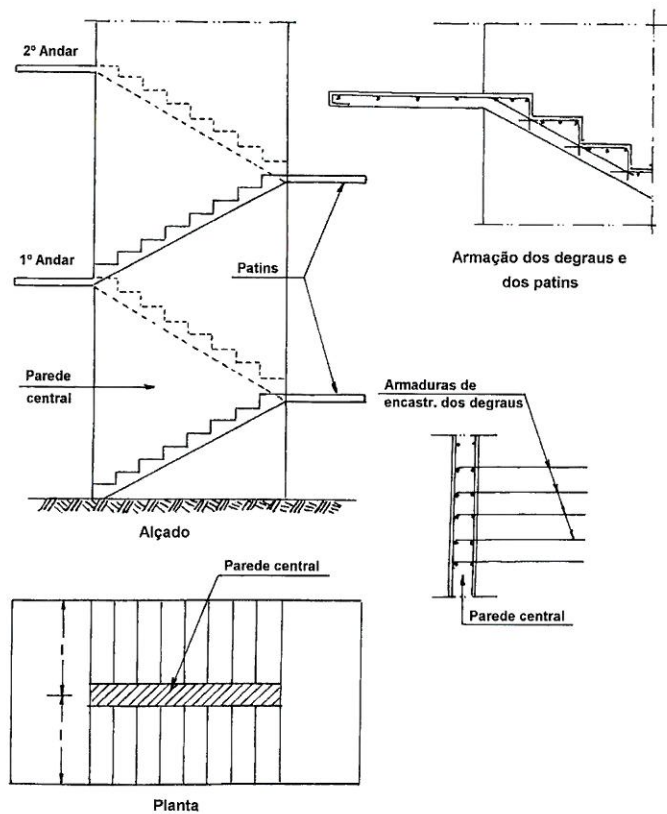
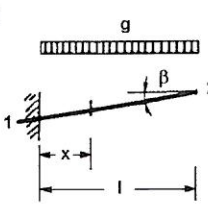
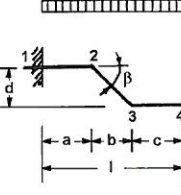
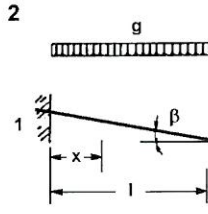
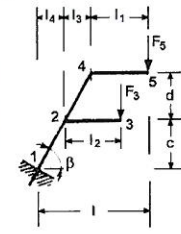
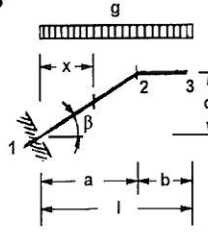
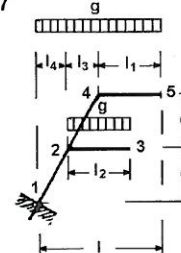
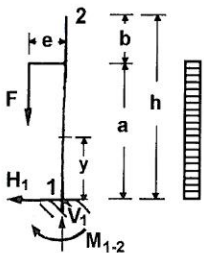
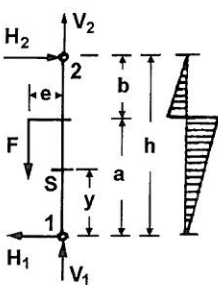
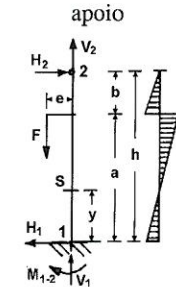
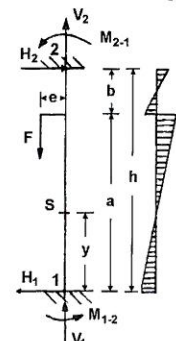


Fig. 2.15 - Escada com degraus em consola de uma parede central e disposição das armaduras

Quadro 2.1 - Esforços e deformações em consolas de eixo inclinado ou quebrado

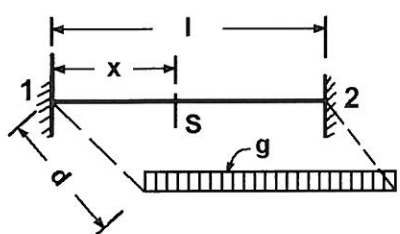
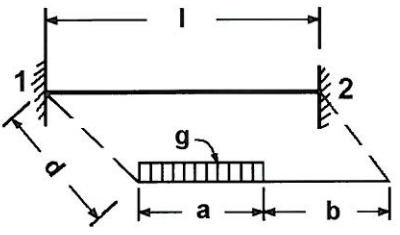
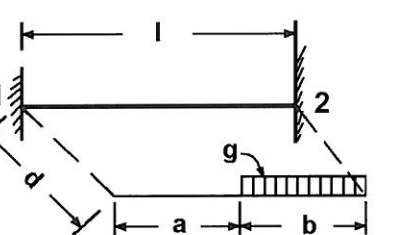
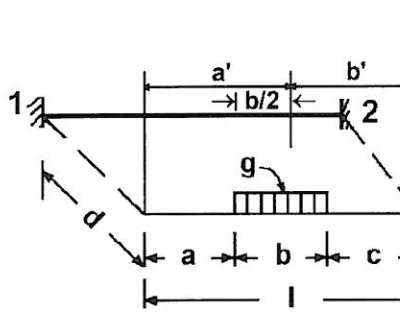
<p>1</p> 	$R_1 = gl; M_{1-2} = -\frac{gl^2}{2}$ $M_x = -\frac{g}{2} (1-x)^2$ $N_x = g(1-x) \operatorname{sen}\beta$ $V_x = g(1-x) \operatorname{cos}\beta$ $f_{2y} = \frac{gl^4}{8EI \operatorname{cos}\beta}$ $f_{2x} = \frac{gl^4 \operatorname{tg}\beta}{8EI \operatorname{cos}\beta}$	<p>5</p> 	$R_1 = gl; M_{1-2} = -\frac{gl^2}{2}$ $M_x = -g \frac{(1-x)^2}{2}$ <p>Em 2-3, $N_x = -g(1-x) \operatorname{sen}\beta$</p> $f_{4y} = \frac{g}{8EI} \left[\frac{1^4 - (b+c)^4 + c^4}{\operatorname{cos}\beta} + \frac{(b+c)^4 - c^4}{\operatorname{cos}\beta} \right]$ $f_{4x} = -\frac{g}{12EI} \left[\frac{2dl^3 + b^2 \times}{\operatorname{cos}\beta} \times (3l - 3a + b) \operatorname{tg}\beta \right]$
<p>2</p> 	$R_1 = gl; M_{1-2} = -\frac{gl^2}{2}$ $M_x = -\frac{g}{2} (1-x)^2$ $N_x = -g(1-x) \operatorname{sen}\beta$ $V_x = g(1-x) \operatorname{cos}\beta$ $f_{2y} = \frac{gl^4}{8EI \operatorname{cos}\beta}$ $f_{2x} = \frac{gl^4 \operatorname{tg}\beta}{8EI \operatorname{cos}\beta}$	<p>6</p> 	$R_1 = F_3 + F_5$ <p>Em 2-4,</p> $N_x = F_5 \operatorname{sen}\beta$ $V_x = F_5 \operatorname{cos}\beta$ <p>Em 1-2,</p> $N_x = (F_3 + F_5) \operatorname{sen}\beta$ $V_x = (F_3 + F_5) \operatorname{cos}\beta$ $M_{4-5} = M_{4-2} = -F_5 l_1$ $M_{2-4} = -F_5 (l_1 + l_3)$ $M_{2-3} = -F_3 l_2$ $M_{2-1} = \left[F_3 l_2 + F_5 (l_1 + l_3) \right]$ $M_{1-2} = \left[F_3 (l_2 + l_4) \right] + \left[F_5 (l_1 + l_3 + l_4) \right]$
<p>3</p> 	$R_1 = gl; M_{1-2} = -\frac{gl^2}{2}$ $M_x = -\frac{g}{2} (1-x)^2$ $f_{3y} = \frac{g}{8EI} \left[\frac{1^4 - b^4}{\operatorname{cos}\beta} + b^4 \right]$ $f_{3x} = \frac{ga^2 \operatorname{tg}\beta}{24EI \operatorname{cos}\beta} \times \left[6l^2 + 3a^2 - 8al \right]$	<p>7</p> 	$R_1 = g(l_1 + l_2)$ $M_{4-5} = M_{4-2} = -\frac{gl_1^2}{2}$ $M_{2-4} = -\frac{g(l_1 + l_3)^2}{2}$ $M_{2-3} = -\frac{gl_2^2}{2}$ $M_{2-1} = -\frac{g}{2} \left[(l_1 + l_3)^2 + l_2^2 \right]$ $M_{1-2} = -\frac{g}{2} \left[l^2 + l_2^2 + 2l_2 l_4 \right]$

Quadro 2.2 - Esforços em elementos verticais sujeitos a um momento $M=Fe$

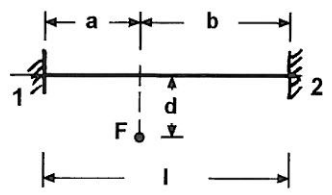
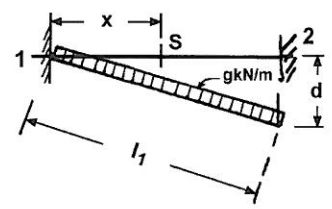
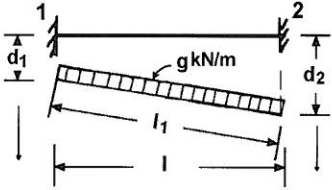
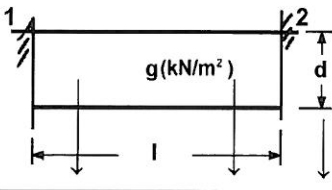
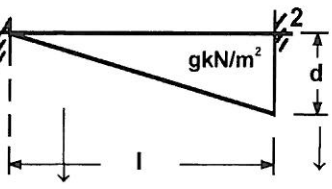
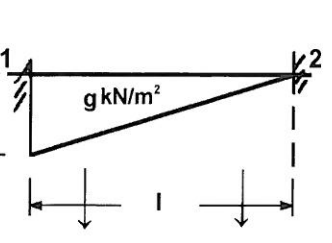
<p>1 - Em consola</p> 	$V_1 F; H_1 = 0$	$V_1 = F; H_1 = 0$ $y \leq a, M_y = Fe$ $M_{1-2} = 1 - Fe$ $y > a, M_y = 0$
<p>2 - Articulado sem apoio</p> 	$V_1 = \frac{Fb}{h}; V_2 = \frac{Fa}{h}$ $H_1 = -\frac{Fe}{h}$ $H_2 = -H_1$	$y \leq a, M_y = \frac{Fe}{h}y$ $y > a, M_y = -Fe\left(1 - \frac{y}{h}\right)$ $M_{1-2} = M_{2-1} = 0$
<p>3 - Articulado/encastado com apoio</p> 	$V_1 = \frac{Fb}{h}; V_2 = \frac{Fa}{h}$ $H_1 = \frac{3Fe}{2h}\left(1 - \frac{b^2}{h^2}\right)$ $H_2 = -H_1$	$y \leq a, M_y = Fe + H_2(h - y)$ $M_{1-2} = -\frac{Fe}{2}\left(1 - 3\frac{b^2}{h^2}\right)$ $y > a, M_y = H_2(h - y)$ $M_y = 0$ para $b = h/\sqrt{3}$
<p>4 - Encastado nos apoios</p> 	$V_1 = \frac{b}{h}F; V_2 = \frac{a}{h}F$ $H_1 = \frac{3Fe}{h}\left(1 - \frac{a^2}{h^2} - \frac{b^2}{h^2}\right)$ $H_2 = -H_1$	$y \leq a, M_y = Fe + M_{2-1} + H_2(h - y)$ $y > a, M_y = M_{2-1} + H_2(h - y)$ $M_{1-2} = -Fe\left(1 - \frac{a^2}{h^2} - 2\frac{b^2}{h^2}\right)$ $M_{1-2} = 0$ para $b = 2a$ $M_{2-1} = Fe\left(1 - \frac{2a^2}{h^2} - \frac{b^2}{h^2}\right)$ $M_{2-1} = 0$ para $b = \frac{a}{2}$



Quadro 2.3 - Reacções de apoio de vigas encastradas solicitadas por acções uniformes excêntricas

<p>1</p> 	$V_1 = V_2 = \frac{gl}{2}; \quad M_x = \frac{g}{12} (6lx - 6x^2 - l^2)$ $M_{1-2} = M_{2-1} = -\frac{gl^2}{12}; \quad M_{l/2} = \frac{gl^2}{24}$ $T_x = -\frac{gd}{2} (l - 2x); \quad T_{1-2} = -T_{2-1} = -\frac{gdl}{2}$
<p>2</p> 	$V_1 = \frac{ga}{2l^3} (2l^3 - 2a^2l + a^3); \quad V_2 = \frac{ga^3}{2l^3} (2l - a)$ $M_{1-2} = -\frac{ga^2}{l^2} \left(\frac{l^2}{2} - \frac{2al}{3} + \frac{a^2}{4} \right)$ $M_{2-1} = -\frac{ga^2}{l^2} \left(\frac{al}{3} - \frac{a^2}{4} \right)$ $T_{1-2} = -\frac{gad}{2l} (a + 2b); \quad T_{2-1} = \frac{ga^2d}{2}$
<p>3</p> 	$V_1 = \frac{gb^3}{2l^3} (2l - b); \quad V_2 = \frac{gb}{2l^3} (2l^3 - 2b^2l + b^3)$ $M_{1-2} = -\frac{g}{l^2} \left[\frac{b^3l}{3} - \frac{b^4}{4} \right]$ $M_{2-1} = -\frac{g}{l^2} \left[\frac{b^2l^2}{2} - \frac{2b^3l}{3} + \frac{b^4}{4} \right]$ $T_{1-2} = -\frac{gb^2d}{2l}; \quad T_{2-1} = \frac{gbd}{2l} (2a + b)$
<p>4</p> 	$V_1 = \frac{1}{l} \left[gbc' - (M_{1-2} - M_{2-1}) \right]$ $V_2 = \frac{1}{l} \left[ga'b + (M_{1-2} - M_{2-1}) \right]$ $M_{1-2} = -\frac{gb^3}{12l^2} \left[l - 3b' + 12a' \left(\frac{b'}{b} \right)^2 \right]$ $M_{2-1} = -\frac{gb^3}{12l^2} \left[l - 3a' + 12b' \left(\frac{a'}{a} \right)^2 \right]$ $T_{1-2} = -\frac{gbd}{2l} (b + 2c); \quad T_{2-1} = \frac{gbd}{2l} (2a + b)$

Quadro 2.3 (Cont.) - Reacções de apoio de vigas encastradas solicitadas por acções uniformes excêntricas

<p>5</p> 	$V_1 = \frac{Fb^2}{\ell^3}(\ell + 2a); \quad V_2 = \frac{Fa^2}{\ell^3}(\ell + 2a);$ $M_{1-2} = -\frac{Fab^2}{\ell^2}; \quad M_{2-1} = -\frac{Fa^2b}{\ell^2}$ $T_{1-2} = -\frac{Fbd}{\ell}; \quad T_{2-1} = \frac{Fad}{\ell}$
<p>6</p> 	$V_1 = V_2 = \frac{g\ell_1}{2}; \quad M_{1-2} = M_{2-1} = -\frac{g\ell\ell_1}{12}; \quad M_{1/2} = \frac{g\ell\ell_1}{24};$ $T_x = \frac{gd\ell_1}{6\ell^2}(\ell^2 - 3x^2)$ $T_{1-2} = -\frac{gd\ell_1}{6}; \quad T_{2-1} = \frac{gd\ell_1}{3}$
<p>7</p> 	$V_1 = V_2 = \frac{g\ell_1}{2}; \quad M_{1-2} = M_{2-1} = -\frac{g\ell\ell_1}{12}; \quad M_{1/2} = \frac{g\ell\ell_1}{24};$ $T_x = \frac{g\ell_1}{6\ell^2} \left[(2d_1 + d_2)\ell^2 - 3xd_1(2\ell - x) - 3d_2x^2 \right]$ $T_{1-2} = -\frac{g\ell_1}{6}(2d_1 + d_2); \quad T_{2-1} = \frac{g\ell_1}{6}(d_1 + 2d_2)$
<p>8</p> 	$V_1 = V_2 = \frac{g\ell}{2}; \quad M_{1-2} = M_{2-1} = -\frac{g\ell^2}{12}$ $M_x = \frac{g}{12}(6\ell x - 6x^2 - \ell^2); \quad M_{1/2} = \frac{g\ell^2}{24}$ $T_x = -\frac{gd}{4}(\ell - 2x); \quad T_{1-2} = -T_{2-1} = -\frac{gd\ell}{4}$
<p>9</p> 	$V_1 = \frac{3}{20}gd\ell; \quad V_2 = \frac{7}{20}gd\ell$ $M_x = \frac{gd}{30\ell}(9\ell^2x - 10x^3 - 2\ell^3)$ $T_x = -\frac{gd^2}{24\ell^2}(\ell^3 - 4x^3); \quad T_{1-2} = -\frac{gd^2\ell}{24}; \quad T_{2-1} = \frac{gd^2\ell}{8}$
<p>10</p> 	$V_1 = \frac{7}{20}gd\ell; \quad V_2 = \frac{3}{20}gd\ell; \quad M_x = \frac{gd}{60\ell}(10x^3 - 30\ell x^2 + 21\ell^2x - 3\ell^3)$ $M_{1-2} = -\frac{gd\ell^2}{20}; \quad M_{2-1} = -\frac{gd\ell^2}{30}$ $T_x = -\frac{gd^2}{24\ell^2}(-3\ell^3 + 12\ell^2x - 12\ell x + 4x^3)$ $T_{1-2} = -\frac{gd^2\ell}{8}; \quad T_{2-1} = \frac{gd^2\ell}{24}$



CAPÍTULO 3

• Escadas com degraus apoiados

3.1 - GENERALIDADES

Este tipo de escadas são constituídas por degraus que geralmente se apoiam numa laje que os solidariza entre si, podendo no caso das escadas exteriores a laje apoiar-se directamente sobre o solo constituindo assim uma soleira; no caso das escadas interiores quási sempre a laje constitui o elemento resistente à flexão, que se apoia, geralmente através de duas das suas extremidades, em paredes da caixa da escada ou em vigas longitudinais ou transversais, ou ainda nas lajes dos patamares e dos pisos dos edifícios.

No 1º caso os degraus são em regra solicitados à compressão, utilizando-se geralmente o betão simples na sua construção; só em situações especiais se recorre ao betão armado, como no caso apresentado na Fig. 3.3 que se refere a acessos do nível do solo a construções subterrâneas. Aqui a soleira da escada assegura o encastramento dos muros em consola que sustentam o solo existente lateralmente, dum lado e do outro, no sentido longitudinal da escada. Os degraus ficam em contacto directo com o exterior na zona a descoberto existente entre a superfície e o ponto em que o desnível vencido pela escada possa assegurar um pé-direito suficiente para a construção de um tecto, situado abaixo do nível do solo.

A fig. 3.7 refere-se a escadas constituídas por degraus assentes numa laje de betão armado que se apoia, no sentido transversal, em duas paredes longitudinais, a exterior de betão armado e a interior de alvenaria de tijolo.

3.2 - ESCADA APOIADA NO SOLO

As escadas com degraus apoiados no terreno através de uma laje de soleira como atrás se referiu, constituem o revestimento de um talude onde as escadas, e também certas rampas, se integram num arranjo urbanístico ou constituem um acesso a uma utilização subterrânea; em qualquer caso destinam-se a transpor o desnível entre dois terraplenos. Em regra a inclinação 1:2 é tecnicamente possível na grande maioria dos solos, por ser inferior ao talude natural

$\left(\text{tg } 26^\circ 30' = \frac{1}{2} \right)$; podem adoptar-se inclinações maiores, até 1:1, em solos rochosos;

note-se no entanto que a referida inclinação 1:2 é a máxima que em geral corresponde a uma escada cómoda para circulação.

A acção vertical F (peso da estrutura e sobrecarga) admite duas componentes, uma delas, F_n , dirigida na direcção normal à superfície do talude, comprimindo-o e a outra, F_x , na direcção da superfície da laje, devendo a fundação da base do ensoleiramento inclinado resistir por atrito ao deslizamento.

Na parte inferior da escada pode existir uma “cortina” de remate encastrada no solo, Fig. 3.1. Em certos casos pode haver necessidade de drenar o solo, antes de executar a obra, com drenos localizados ou com um revestimento poroso à superfície do talude.

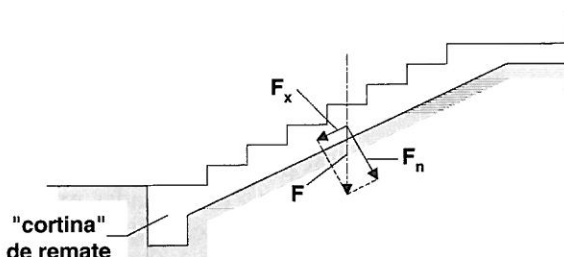


Fig.3.1 - Corte longitudinal da escada apoiada no solo.

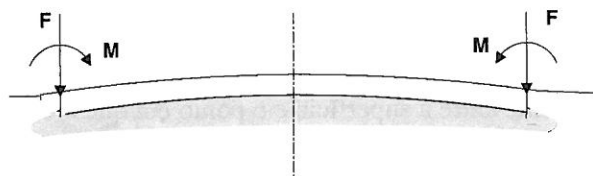


Fig.3.2 - Soleira assente sobre o solo, solicitada nas extremidades.

Em certas escadas (Fig. 3.2), quando existem estruturas laterais de retenção de solos, podem actuar forças F e momentos M ao longo dos bordos inclinados da escada, quando essas estruturas laterais forem solidárias com a soleira dessa escada e se recorra à utilização de betão armado. Neste caso deve ter-se em conta o impulso das terras e dimensionar a estrutura através do formulário da teoria das vigas fundadas sobre solo elástico.

Exemplo 3.1 - Dimensionamento duma escada assente num terreno argilo-arenoso compacto para acesso a construção subterrânea (Fig. 3.3).

$$\varphi = 30^{\circ}, \quad \gamma = 18,0 \text{ kN} / \text{m}^3$$

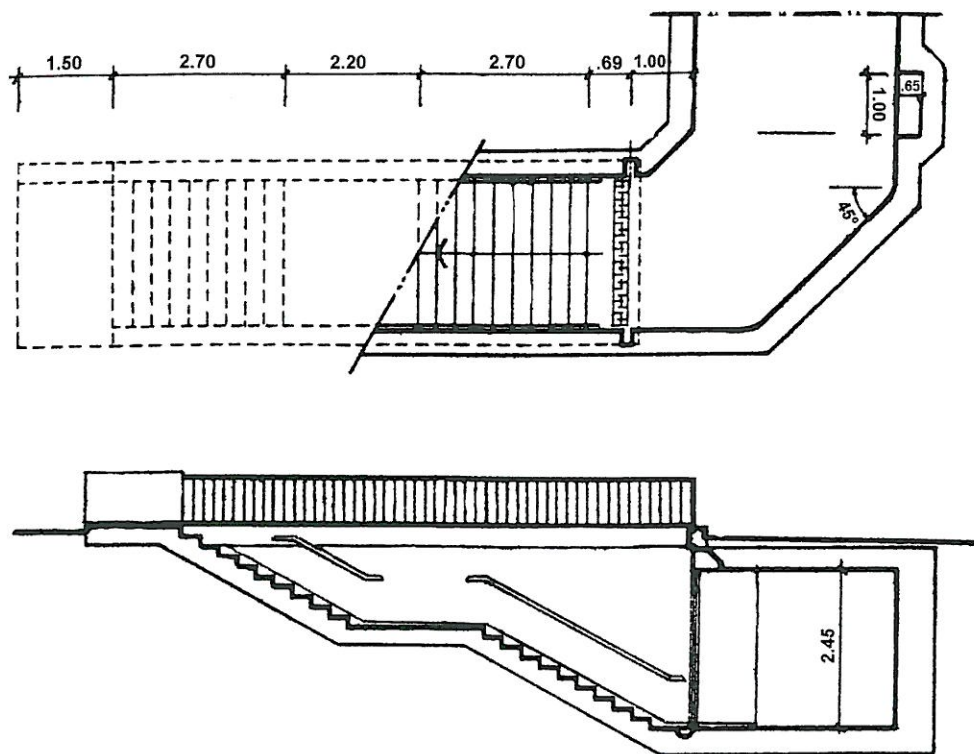


Fig.3.3 - Escada para acesso a construção subterrânea (metropolitano)

As acções actuantes são as seguintes:

- permanentes, peso próprio e impulso das terras, com sobrecarga no terrapleno $q = 20 \text{ kN/m}^2$
- sobrecarga uniformemente distribuída $q' = 5,0 \text{ kN/m}^2$ nos lanços e patamares, devida à circulação das pessoas.

As acções a ter em conta são apenas a força F (peso das paredes laterais) e momento flector M devido ao impulso das terras.

As acções permanentes sobre a soleira (peso próprio desta e dos degraus), bem como a sobrecarga uniformemente distribuída, não produzem outros esforços que os de compressão dirigida na vertical (Fig. 3.1). Consideram-se os degraus de betão simples com características de resistência ao desgaste produzido pelo transito das pessoas e pela acção das intempéries.

O impulso das terras, que se determina a seguir, condiciona a armação das paredes laterais. Assim, temos:

- impulsos I_1 e I_2 das terras entre as profundidades 0 - 1,5m e 1,5 - 3,0m, com sobrecarga $q = 20,0 \text{ kN/m}^2$ uniformemente distribuida na superfície do passeio lateral ao arruamento em que a escada se insere

$$h_1 = 1,50 + \frac{20,0}{18,0} = 2,61 \text{ m} \quad ; \quad h_2 = 3,0 + \frac{20,0}{18,0} = 4,11 \text{ m}$$

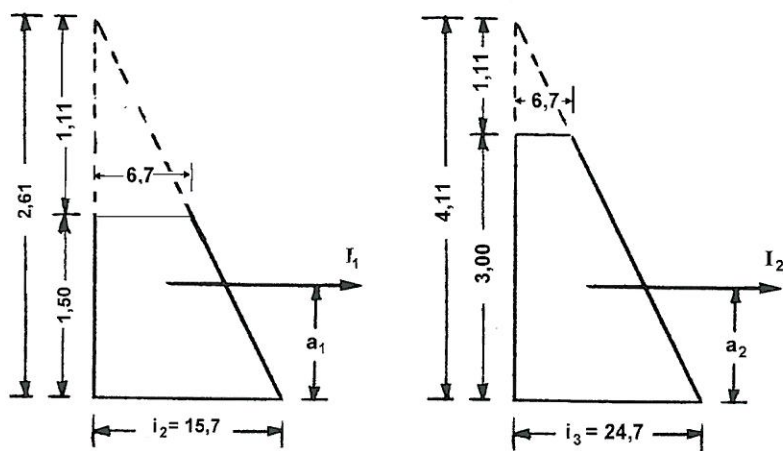


Fig.3.4 - Impulsos i_1 e i_2 das terras sobre os muros encastrados na escada.

No 1º caso

$$i_1 = h \operatorname{tg}^2\left(45 - \frac{j}{2}\right) = \frac{18,0}{3} \times 2,61 = 15,7 \text{ kN/m}^2$$

$$i_2 = \frac{18,0}{3} (2,61 - 1,50) = 6,7 \text{ kN/m}^2$$

$$I_1 = \frac{6,7 + 15,7}{2} \times 1,50 = 16,8 \text{ kN/m}; \quad a_1 = \frac{1,50(6,7 \times 2 + 15,7)}{3(6,7 + 15,7)} = 0,65 \text{ m}$$

$$M_1 = a_1 I_1 = 16,8 \times 0,65 = 10,9 \text{ kN.m/m}$$

No 2º caso

$$i_3 = \frac{18,0}{3} \times 4,11 = 24,7 \text{ kN / m}^2$$

$$I_2 = \frac{6,7 + 24,7}{2} \times 3,0 = 47,1 \text{ kN / m}; \quad a_2 = \frac{3,00(6,7 \times 2 + 24,7)}{3(6,7 + 24,7)} = 1,20 \text{ m}$$

$$M_2 = a_2 I_2 = 1,20 \times 47,1 = 56,5 \text{ kN.m / m}$$

Convém que as paredes laterais sejam moldadas contra o terreno lateral, utilizando moldes apenas nas faces interiores, quando o terreno apresenta coesão para permitir uma escavação aproximadamente vertical.

Na Fig. 3.5 apresenta-se a disposição das armaduras dos troços superior (até 1,5 m) e inferior (de 1,5 a 3 m) das paredes de contenção do terreno e da laje de soleira da escada (estreita) na secção de maior altura dessas paredes.

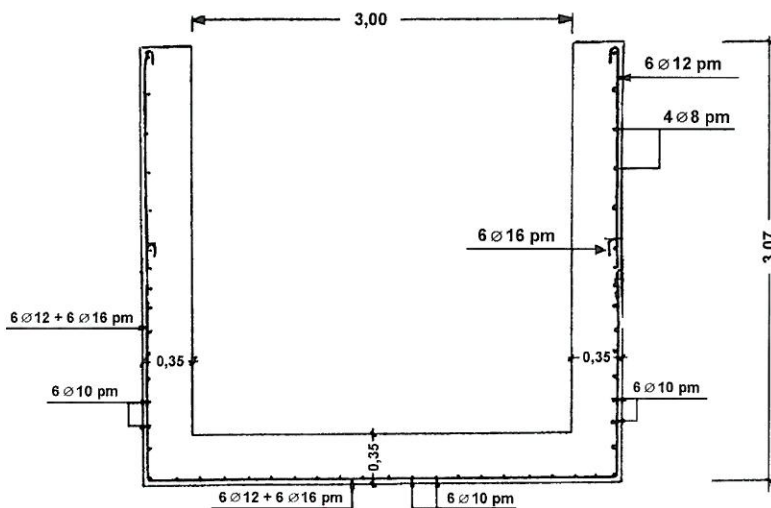


Fig.3.5 - Disposição das armaduras nas paredes laterais e na soleira da escada

A armadura da base das paredes prolonga-se pela face interior da soleira, Fig. 3.5; esta deve ser verificada como viga sobre solo elástico (*), tendo em conta o valor dos

(*) Wolfer - "Vigas Flotantes en Medio Elastico" Ed. Gustavo Gili, Barcelona, 1969.

Young - "Roark's Formulas for Stress & Strain", McGraw-Hill Editions, 1989

momentos M_2 e dos pesos F_2 das paredes laterais de contenção das terras. O valor máximo de F_2 é então:

$$F_2 = 0,35 \times 2,90 \times 1,0 \times 25 = 25,4\text{kN}$$

No caso de soleiras largas pode-se tirar partido da redução do valor dos momentos, à medida que se progride das extremidades para o centro, no sentido transversal ao desenvolvimento da escada.

3.3 - ESCADA APOIADA PELAS EXTREMIDADES DOS DEGRAUS

Nestes casos a escada pode ser constituída por uma laje maciça de betão armado ou por uma laje aligeirada de vigotas de betão pré-esforçado com blocos incorporados sobre a qual se moldam os degraus.

Em regra a escada pode mobilizar um certo grau de encastramento nos apoios da laje designadamente quando esses apoios são constituídos por paredes de alvenaria ou sobretudo de betão armado, dispostas longitudinalmente (Fig. 3.7), nas quais os elementos resistentes se apoiam com entregas pelo menos iguais à espessura da laje da escada.

O grau de encastramento depende da rigidez relativa da laje da escada e das paredes e também da capacidade destas últimas para o efeito em referência; nalguns casos pode existir certa incerteza quanto ao seu valor, designadamente por o grau de encastramento poder variar ao longo do desenvolvimento da escada, em virtude do aumento do peso da parede da parte superior para a base da escada.

Uma das questões a ter em conta na avaliação desse valor são os condicionamentos do processo de construção, designadamente os que resultam da coordenação da execução das paredes de apoio e da escada. Com efeito, podem-se, sobretudo no caso de paredes de betão armado, moldar rasgos longitudinais para penetração e entrega da laje de betão armado da escada, deixando ou não, conforme as conveniências, ferros de espera no rasgo para posterior ligação à laje, na sua fase de execução.

Contrariamente ao que sucede no caso atrás exposto dos degraus resistentes em consola de pequeno vão, no caso das escadas apoiadas nas duas extremidades no sentido transversal, em regra não interessa procurar solidarizar os elementos resistentes (lajes inclinadas) com os degraus. Com efeito, a ligação estrutural destes dois elementos confere-lhes espessura variável, da qual não se tira grande partido de resistência estrutural.

Por esta razão os degraus podem ser executados em betão simples, simultaneamente com as lajes, intervindo apenas com o seu peso, não contribuindo portanto como elementos resistentes; podem também ser executados, depois de concluídas as lajes, em betão simples ou sob a forma de enchimento em alvenaria simples, de secção triangular.

3.3.1 - ELEMENTOS LINEARES PARCIALMENTE ENCASTRADOS À FLEXÃO NOS APOIOS

Designa-se por “grau de encastramento n ” dos apoios numa viga de um só tramo ao valor

$$n = \frac{M}{M_e} = \left(1 - \frac{\varphi}{\varphi_a}\right) \quad , \text{ em que:}$$

M - Momento flector actuante nos apoios da viga

M_e - Momento flector correspondente ao encastramento perfeito nesse apoio.

φ - Rotação efectiva da secção de apoio

φ_a - Rotação do mesmo apoio com rotação livre.

Assim, se no apoio considerado actua o momento de encastramento perfeito ($\varphi = 0$) aí $n = 1$; se nesse apoio a rotação da secção é livre ($\varphi = \varphi_a$), então $n = 0$.

Entre os dois limites, apoio simples ($n = 0$) e encastramento perfeito ($n = 1$), nos apoios duma viga podem existir graus de encastramento $n = 1/2, 1/3, 1/4...$ respectivamente quando neles o momento actuante tiver valor igual a $1/2, 1/3, 1/4...$ daquele que corresponde a um encastramento perfeito nesse apoio (*).✕

Nos quadros 3.1 a 3.4 indicam-se os momentos flectores nos apoios e a meio vão, bem como as reacções de apoio para vigas parcialmente encastradas; os valores indicados nesses quadros resultam da condição de equilíbrio estático da viga de um só tramo, parcialmente encastrada, com grau de encastramento n , nas duas extremidades.

Os referidos valores abrangem os casos de actuação de acções uniformemente distribuídas, de distribuição trapezoidal e triangular (resultantes de lajes de betão armado apoiadas nas vigas) e de forças concentradas F. A determinação dos esforços resultantes da actuação das acções de distribuição trapezoidal e triangular é feita introduzindo (através de coeficientes k e k') numa acção fictícia p uniformemente distribuída equivalente, aplicando-se-lhes o formulário relativo á actuação de acções uniformemente distribuídas, vidé exemplo 3.3.

As incertezas anteriormente mencionadas levam a certas práticas simplificadas nas construções de betão armado; uma regra segura, aplicável para o dimensionamento das armaduras, consiste em considerar apoios simples para os momentos a meio vão ($g\ell^2 / 8$) e a 1/5 do vão levanta metade dos varões para cobrir os momentos negativos nos apoios, correspondentes a metade do valor a meio vão ($g\ell^2 / 16$). Este procedimento equivale a tomar no vão um momento positivo maior do que o que resulta dos correspondentes momentos negativos nos apoios.

(*) J. S. Brazão Farinha. "Encastramento Imperfeito", Manual de Estruturas Ed. Técnica, Lisboa 1976, "Revista Técnica" n.º 237 (Dez. 1953), 260 (Março 1956) e 328 (Maio 1963) e "Boletim da Ordem dos Engenheiros", Vol. V, n.º 8. Memória n.º 171, F.J.Silva Mendonça "Revista Técnica" n.º 324 (Jan. 1963).

De acordo com o referido podemos então ter as seguintes situações:

a) No caso de pequena penetração da laje de betão numa parede de alvenaria, ou quando o peso desta acima do plano superior dos degraus for pequeno, pode admitir-se:

$$M_{\ell/2} = \frac{g\ell^2}{8}; \quad M_{1-2} = M_{2-1} = -\frac{g\ell^2}{16}$$

b) No caso de apoio directo em paredes de alvenaria e quando o peso desta for comprovadamente suficiente:

$$M_{\ell/2} = \frac{g\ell^2}{10}; \quad M_{1-2} = M_{2-1} = -\frac{g\ell^2}{20}$$

c) Quando os degraus estiverem ligados a cintas ou vigas de betão armado embebidas nas paredes de alvenaria e em condições de poder mobilizar um peso significativo de alvenaria:

$$M_{\ell/2} = \frac{g\ell^2}{12}; \quad M_{1-2} = M_{2-1} = -\frac{g\ell^2}{12}$$

valores estes que são de adoptar no caso se tratar de paredes de betão convenientemente armadas.

d) No caso anterior, quando a entrega da escada for importante ou as paredes de betão armado forem relativamente espessas em relação à escada e esta seja convenientemente armada, pode-se considerar

$$M_{\ell/2} = \frac{g\ell^2}{18}; \quad M_{1-2} = M_{2-1} = -\frac{g\ell^2}{12}$$

valores correspondentes ao encastramento perfeito nos dois apoios, com reserva de resistência a meio vão.

O anteriormente referido equivale a considerar, no caso de encastramento parcial $n = 3/10$ (ver quadro 3.1) um diagrama resistente mais amplo nas zonas de momentos negativos, com o simples levantamento de metade das armaduras do meio vão, onde deixam de ser necessárias junto à parte inferior da viga.

O quadro 3.2 contempla as vigas apoiadas em condições diferentes nos apoios 1 e 2 (vidé exemplo 3.2). Como podem ocorrer diferentes situações quanto à natureza dos

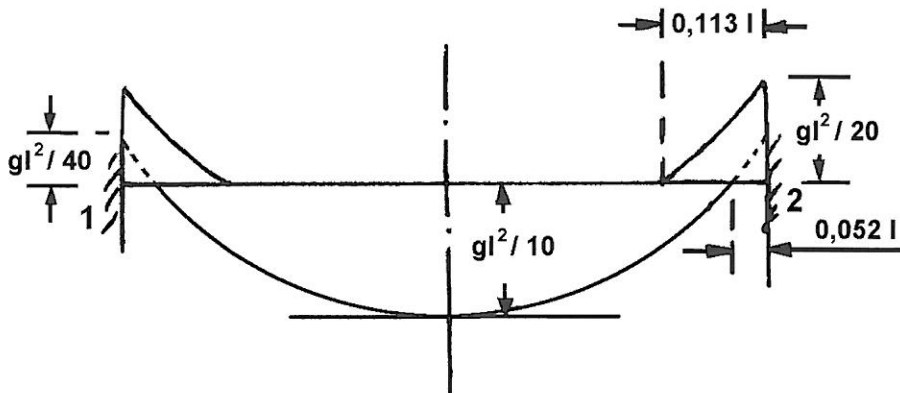


Fig.3.6 - Diagrama dos momentos flectores actuantes numa viga parcialmente encastrada.

apoios, o quadro 3.3 dá indicações quanto às rigidezes e aos coeficientes de transmissão deste tipo de elementos resistentes (vidé exemplo 3.5).

Exemplo 3.2 - Escada, com 3,0 m de largura de uma estação de metropolitano, com degraus apoiados em paredes longitudinais de betão armado, de um lado, e de tijolo, do outro (Fig. 3.7); os focinhos dos degraus são executados com perfil pré-fabricado resistente ao desgaste e os cobertores são acabados com revestimento anti-derrapante, uns e outros reparáveis com aplicação periodica de argamassas de resina epoxi.

Nos lanços inclinados das escadas as acções são as seguintes, tendo em conta os fluxos do público:

Peso próprio da laje	$0,07 \times 25,0$	$= 1,75 \text{ kN/m}^2$
P.P.médio dos degraus	$0,16 \times 25,0$	$= 2,00 \text{ ''}$
Revestimento		$= 0,75 \text{ ''}$
Sobrecarga		$= 5,00 \text{ ''}$
		$9,50 \text{ kN/m}^2$

Na zona do patamar são as seguintes as acções actuantes:

∝Peso próprio da laje	$0,13 \times 25,0$	$= 3,25 \text{ kN/m}^2$
Revestimento		$= 0,75 \text{ ''}$
Sobrecarga		$= 5,00 \text{ ''}$
		$9,00 \text{ kN/m}^2$

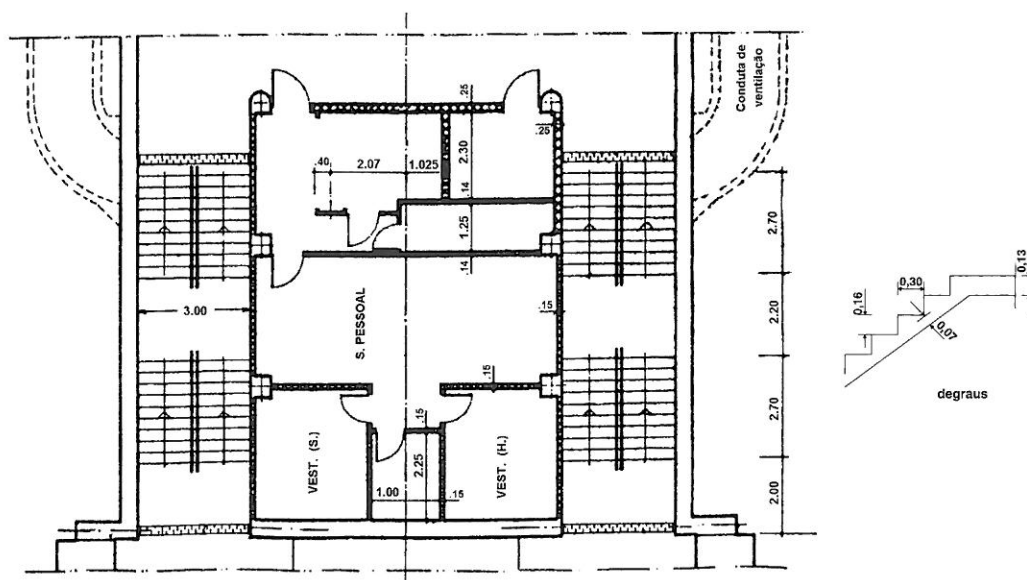


Fig.3.7 - Escada com degraus apoiados em paredes longitudinais

As condições de construção desta obra implicavam que as paredes exteriores em contacto com o solo envolvente da estação, deviam ser obrigatoriamente construídas de betão armado, antes da execução das escadas.

As paredes interiores, de alvenaria de tijolo, podiam ser construídas coordenadamente com as escadas ficando estas desde logo apoiadas sobre as alvenarias em construção, betonando a escada após prévia regularização do topo da parede.

Na execução das paredes de betão armado foram moldados no betão rasgos longitudinais inclinados, com a profundidade de 10 cm, deixando-se ferros de espera dobrados, para posterior encastramento das lajes das escadas; estas foram dimensionadas a meio vão para $g\ell^2 / 10$, simplesmente apoiadas nas paredes de tijolo e parcialmente encastrada ($g\ell^2 / 16$) nas paredes de betão armado, com um grau de encastramento de $n = 3/4 \sim 0.75$.

Exemplo 3.3 - Determinação dos valores característicos dos esforços (M_{1-2} , $M_{1/2}$, V_1) a ter em conta no dimensionamento da viga de betão armado de secção $b.h = 0,30\text{m} \times 0,60\text{m}$ semi-encastrada nos apoios 1 e 2 ($n = 1/2$), que servem de suporte a uma laje de betão armado com vão de $\ell_x = 6,0\text{ m}$, $\ell_y = 4,0\text{ m}$ sujeita às seguintes acções:

LAJES E ESCADAS DE BETÃO ARMADO

Peso próprio	0,12 x 25	= 3,0 kN/m ²
Acabamentos		= 1,0 “
		g = 4,0 kN/m ²
Sobrecarga		q = 6,0
		(g+q) = 10,0 kN/m ²

Acções equivalentes, p e p', uniformemente distribuídas (vidé quadro 3.1)

a) Vigas de vão ℓ_x (distribuição trapezoidal, $\alpha = \ell_x / \ell_y = 6,0 / 4,0 = 1,5 > 1,0$)

	$M_{\ell/2}$	M_{1-2}	V_1
peso das vigas (0,30x0,60x25)	4,50 kN/m	4,50 kN/m	4,50 kN/m
acções da laje			
(10 x 6,0 x 0,871/2)	17,42	-	-
(10 x 6,0 x 0,815/2)	-	16,30	-
(10 x 6,0 x 0,667/2)	-	-	13,34
	p= 21,92 kN/m;	p=20,80 kN/m	p'=17,84 kN/m

$$M_{\ell/2} = p \frac{\ell_x^2}{12} = \frac{21,92 \times 6,0^2}{12} = 65,76 \text{ kN.m}$$

$$M_{1-2} = M_{2-1} = -\frac{p\ell_x^2}{24} = -\frac{20,80 \times 6,0^2}{24} = 31,20 \text{ kN.m}$$

$$V_1 = V_2 = p' \frac{\ell_x}{2} = 17,84 \times \frac{6,0}{2} = 53,52 \text{ kN}$$

Verificação: a soma $M_{\ell/2} + M_{1-2} = 65,76 + 31,20 = 97,0 \text{ kN.m}$ é igual ao valor de

$M_{\ell/2}$ da viga simplesmente apoiada, para o qual $p = 4,50 + 10 \times 4,0 \times 0,852/2 = 21,54 \text{ kN/m}$; com efeito:

$$M_{\ell/2} = p \frac{\ell_x^2}{8} = \frac{21,54 \times 6,0^2}{8} = 97,0 \text{ kN.m}$$

b) Vigas de vão ℓ_y , quadro 3.1 coluna (distribuição triangular)

	$M_{\ell/2}$	M_{1-2}	V_1
peso das vigas	4,50 kN/m	4,50 kN/m	4,50 kN/m
acções da laje			
(10 x 4,0 x 0,688/2)	13,76	-	-
(10 x 4,0 x 0,625/2)	-	12,50	-
(10 x 4,0 x 0,500/2)	-	-	10,00
	$p = 18,26$ kN/m;	$p = 17,0$ kN/m;	$p' = 14,50$ kN/m

$$M_{\ell/2} = p \frac{\ell_y^2}{12} = \frac{18,26 \times 4,0^2}{12} = 24,35 \text{ kN.m}$$

$$M_{1-2} = M_{2-1} = -\frac{p \ell_y^2}{24} = -\frac{17,0 \times 4,0^2}{24} = -11,33 \text{ kN.m}$$

$$V_1 = V_2 = p' \frac{\ell_y}{2} = 14,50 \times \frac{4,0}{2} = 29,0 \text{ kN}$$

Verificação: $24,35 + 11,33 = 35,7$ kN.m; para a viga simplesmente apoiada

$$p = 4,50 + 10 \times 0,667 / 2 = 17,84 \text{ kN.m}$$

$$M_{\ell/2} = p \frac{\ell_y^2}{8} = \frac{17,84 \times 4,0^2}{8} = 35,7 \text{ kN.m}$$

Exemplo 3.3 - Determinar o momento máximo e as secções de momento nulo no caso de ser:

$$\ell = 7,0\text{m}; M_{1-2} = -300 \text{ kN.m}; M_{2-1} = -600 \text{ kN.m}; g = 100 \text{ kN/m}$$

Do quadro 3.5 temos:

$$k_1 = \frac{-600 + 300}{100 \times 7,0^2} = -0,061; k_2 = \frac{-600}{100 \times 7,0^2} = -0,122$$

$$k_3 = (0,5 - 0,061) - \sqrt{(0,5 - 0,061)^2 + 2(-0,122 + 0,061)} = 0,173$$

$$k_4 = (0,5 - 0,061) - \sqrt{(0,5 - 0,061)^2 - 2 \times 0,122} = 0,295$$

Abcissa da secção de momento máximo:

$$x = (0,5 - 0,061) \times 7,0 = 3,07 \text{ m}$$

Valor do momento máximo

$$M_{\max} = \left[0,125 - 0,122 + 0,5 \times 0,061 (1 + 0,061) \right] \times 100 \times 7,0^2 = 172 \text{ kN.m}$$

Abcissas de momento nulo:

$$x' = 0,173 \times 7,0 = 1,21 \text{ m}; \quad x'' = 0,295 \times 7,0 = 2,06 \text{ m}$$

Exemplo 3.4 - Determinação dos momentos nos apoios da viga contínua esquematizada na Fig. 3.8 sobre a qual actuam as acções $g = 4,0 \text{ kN/m}$ e $q = 6,0 \text{ kN/m}$, e quando aos apoios extremos 1 e 3 correspondem encastramentos parciais de grau $n = 1/3$.

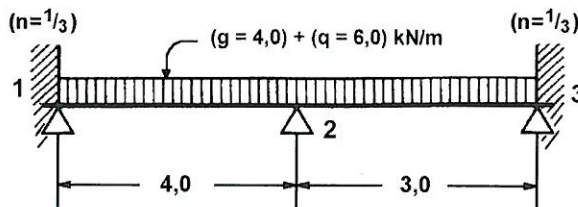


Fig.3.8 - Viga contínua de dois tramos parcialmente encastrada em 1 e em 3.

Coefficientes de distribuição de 2 para 1 e de 2 para 3:

$$\frac{3,0}{4,0 + 3,0} = 0,429; \quad \frac{4,0}{4,0 + 3,0} = 0,571$$

Coefficientes de transmissão (Quadro 3.3):

$$\frac{2 \times \frac{1}{3}}{3 + \frac{1}{3}} = \frac{1}{5} = 0,20$$

O problema é resolvido pelo método de iteração de Cross, trocando os sinais no apoio esquerdo de cada tramo (Fig. 3.9), e tendo em conta os seguintes momentos de encastramento perfeito:

- Momentos de encastramento perfeito com a sobrecarga de 6,0 kN/m no 1º tramo (quadro 3.4):

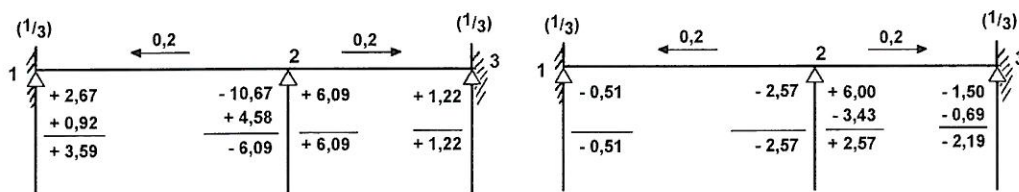
$$M_{1-2} = -\frac{6,0 \times 4,0^2}{36} = -2,67 \text{ kN.m}$$

$$M_{2-1} = -\frac{6,0 \times 4,0^2}{24} \left(3 - \frac{1}{3}\right) = -10,67 \text{ kN.m}$$

- Momentos de encastramento perfeito com a sobrecarga 6,0 kN/m no 2º tramo (quadro 3.4):

$$M_{3-2} = -\frac{6,0 \times 3,0^2}{36} = -1,5 \text{ kN.m}$$

$$M_{2-3} = -\frac{6,0 \times 3,0^2}{24} \left(3 - \frac{1}{3}\right) = -6,0 \text{ kN.m}$$



a) Sobrecarga no 1º tramo

b) Sobrecarga no 2º tramo

Fig.3.9 - Distribuição dos momentos

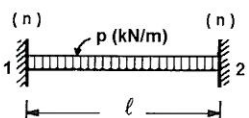
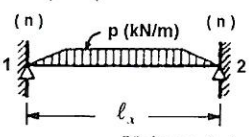
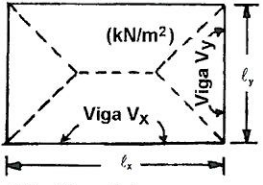
- Momentos máximos nos apoios (sinais corretos):

$$M_{1-2} = -3,59 - (3,59 - 0,51) \times \frac{4,0}{6,0} = -5,64 \text{ kN.m}$$

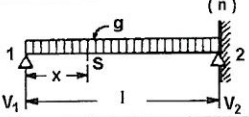
$$M_{2-1} = M_{2-3} = -(6,09 + 2,57) \left(1 + \frac{4,0}{6,0}\right) = -14,45 \text{ kN.m}$$

$$M_{3-2} = -2,19 - (2,19 - 1,22) \frac{4,0}{6,0} = 2,84 \text{ kN.m}$$

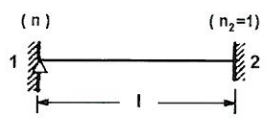
Quadro 3.1 - Momentos flectores nas vigas simétricas parcialmente encastradas

Valores característicos das acções actuantes nas lajes (g+q) kN/m ²													
<p>p(kN/m) actuante na viga: p = peso da viga + (g + q)a sendo "a" a largura da laje apoiada na viga, g e q as acções aplicadas na laje</p> 			<p>Acções p e p' (kN/m) actuantes nas vigas p = peso da viga + (g + q)kℓ_x / 2 para os momentos p' = peso da viga + (g + q)'k'ℓ_x / 2 para o esf. trans.</p> $k = 1 - \frac{4a(1-n) + n}{4(3-2n)a^3}; \quad a = \ell_x / \ell_y$   <p>Valores de k para a = ℓ_x / ℓ_y (ℓ_x > ℓ_y)</p>										
Grau de encastramento n	$M_{1-2} = M_{2-1} = -n \frac{p\ell^2}{12}$	$M_{1/2} = \frac{1,5-n}{12} p\ell^2$	1,00	1,05	1,10	1,15	1,20	1,30	1,40	1,50	1,60	1,80	2,00
			Momentos flectores a 1/2 vão $M_{1/2} = (1,5-n) p\ell^2 / 12$										
0	0	$p\ell^2 / 8$	0,667	0,698	0,725	0,748	0,769	0,803	0,830	0,852	0,870	0,897	0,917
1/4	$p\ell^2 / 48$	$p\ell^2 / 9,6$	0,675	0,706	0,733	0,757	0,777	0,811	0,838	0,859	0,877	0,903	0,922
3/10	$p\ell^2 / 40$	$p\ell^2 / 10$	0,677	0,709	0,736	0,759	0,780	0,813	0,840	0,861	0,879	0,905	0,923
1/3	$p\ell^2 / 36$	$p\ell^2 / 10,3$	0,679	0,710	0,737	0,761	0,781	0,815	0,841	0,863	0,880	0,906	0,924
1/2	$p\ell^2 / 24$	$p\ell^2 / 12$	0,688	0,719	0,747	0,770	0,790	0,824	0,850	0,871	0,877	0,912	0,930
9/14	$p\ell^2 / 18,7$	$p\ell^2 / 14$	0,698	0,730	0,758	0,781	0,801	0,834	0,860	0,880	0,896	0,920	0,936
3/4	$p\ell^2 / 16$	$p\ell^2 / 16$	0,709	0,741	0,769	0,792	0,812	0,845	0,870	0,889	0,905	0,927	0,942
5/6	$p\ell^2 / 14,4$	$p\ell^2 / 18$	0,719	0,752	0,780	0,803	0,823	0,855	0,879	0,898	0,913	0,935	0,949
1	$p\ell^2 / 12$	$p\ell^2 / 24$	0,750	0,784	0,812	0,836	0,855	0,886	0,909	0,926	0,939	0,957	0,969
$k = \frac{8\alpha^3 - 4\alpha + 1}{8\alpha^3}$			Momentos flectores nos apoios $M_{1-2} = M_{2-1} = 1 - n p\ell^2 / 12$										
			0,625	0,655	0,681	0,704	0,725	0,761	0,791	0,815	0,835	0,867	0,891
$k' = \frac{2\alpha - 1}{2\alpha}$			Reacções de apoios $V_1 = V_2 = p'\ell / 2$										
			0,500	0,524	0,546	0,565	0,583	0,615	0,643	0,667	0,688	0,722	0,750

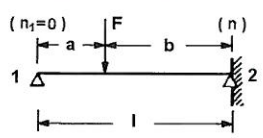
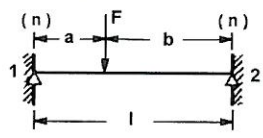
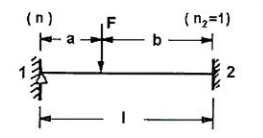
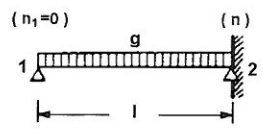
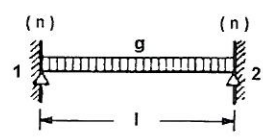
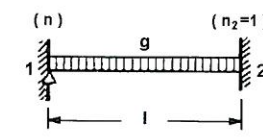
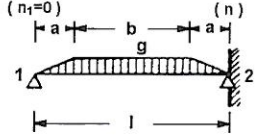
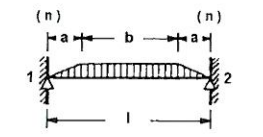
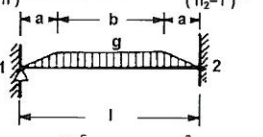
Quadro 3.2 - Momentos flectores nas vigas assimétricas parcialmente encastradas

Graus de encastramento			
0	$V_1 = V_2 = \frac{g\ell}{2}$	$M_{2-1} = 0$	$M_{\max} = \frac{g\ell^2}{8}$ para $x = 0,500\ell$
1/4	$V_1 = \frac{15g\ell}{32}; V_2 = \frac{17g\ell}{32}$	$M_{2-1} = -\frac{g\ell^2}{32}$	$M_{\max} = \frac{g\ell^2}{9,10}$ para $x = 0,469\ell$
3/10	$V_1 = \frac{37g\ell}{80}; V_2 = \frac{43g\ell}{80}$	$M_{2-1} = -\frac{3g\ell^2}{80}$	$M_{\max} = \frac{g\ell^2}{9,35}$ para $x = 0,463\ell$
1/3	$V_1 = \frac{11g\ell}{24}; V_2 = \frac{13g\ell}{24}$	$M_{2-1} = -\frac{g\ell^2}{24}$	$M_{\max} = \frac{g\ell^2}{9,52}$ para $x = 0,458\ell$
1/2	$V_1 = \frac{7g\ell}{16}; V_2 = \frac{9g\ell}{16}$	$M_{2-1} = -\frac{g\ell^2}{16}$	$M_{\max} = \frac{g\ell^2}{10,45}$ para $x = 0,438\ell$
9/14	$V_1 = \frac{47g\ell}{112}; V_2 = \frac{65g\ell}{112}$	$M_{2-1} = -\frac{9g\ell^2}{112}$	$M_{\max} = \frac{g\ell^2}{11,36}$ para $x = 0,419\ell$
3/4	$V_1 = \frac{13g\ell}{32}; V_2 = \frac{19g\ell}{32}$	$M_{2-1} = -\frac{3g\ell^2}{32}$	$M_{\max} = \frac{g\ell^2}{12,12}$ para $x = 0,406\ell$
5/6	$V_1 = \frac{19g\ell}{48}; V_2 = \frac{29g\ell}{48}$	$M_{2-1} = -\frac{5g\ell^2}{48}$	$M_{\max} = \frac{g\ell^2}{12,76}$ para $x = 0,396\ell$
1	$V_1 = \frac{3g\ell}{8}; V_2 = \frac{5g\ell}{8}$	$M_{2-1} = -\frac{g\ell^2}{8}$	$M_{\max} = \frac{g\ell^2}{14,22}$ para $x = 0,375\ell$

Quadro 3.3 - Momentos de encastramento, rigidezes e coeficientes de transmissão de vigas parcialmente encastradas

 <p>M_{1-2}^e, M_{2-1}^e - Momentos de encastramento perfeito em 1 e 2</p>	<p>APLICAÇÃO DE CARGAS</p> $M_{1-2} = nM_{1-2}^e; \quad M_{2-1} = M_{2-1}^e + \frac{l-n}{2} M_{1-2}^e l$ <p>DESLOCAMENTOS Δ DE APOIO</p> $M_{1-2} = \pm \frac{6nEI}{l^2} D; \quad M_{2-1} = \pm \frac{3(1+n)}{l^2} EI \Delta$ <p>RIGIDEZ</p> $k_{2-1} = (3+n) \frac{EI}{l}; \quad \text{coeficiente de transmissão } h_{2-1} = \left(\frac{2n}{3+n} \right)$
--	---

Quadro 3.4 - Reacção de apoio, momentos flectores e esforços transversos de vigas parcialmente encastradas

 <p>$M_{1-2} = 0 \quad M_{2-1} = \frac{Fab}{2l^2}(a+l)n$</p>	 <p>$M_{1-2} = -\frac{Fab^2}{l^2}n \quad M_{2-1} = -\frac{Fa^2b}{l^2}n$</p>	 <p>$M_{1-2} = -\frac{Fab^2}{l^2}n \quad M_{2-1} = -\frac{Fab}{2l}[2a+b(1-n)]$</p>
 <p>$M_{1-2} = 0 \quad M_{2-1} = -\frac{gl^2}{8}n$</p>	 <p>$M_{1-2} = M_{2-1} = -\frac{gl^2}{12}n$</p>	 <p>$M_{1-2} = -\frac{gl^2}{12}n \quad M_{2-1} = -\frac{gl^2}{24}(3-n)$</p>
 <p>$M_{1-2} = 0 \quad M_{2-1} = -\frac{gn}{8}[l^2 - a^2(2l-a)]$</p>	 <p>$M_{1-2} = M_{2-1} = -\frac{gn}{12l}[l^3 - a^2(2l-a)]$</p>	 <p>$M_{1-2} = -\frac{gn}{12l}[l^3 - a^2(2l-a)]$ $M_{2-1} = -\frac{g(3-n)}{24l}[l^3 - a^2(2l-a)]$</p>

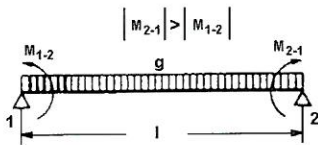


Quadro 3.5 - Momento positivo e abscissas de momento nulo na viga encastrada nos apoios e sujeita a carga uniformemente distribuida g

Estando a barra orientada de modo que $|M_{2-1}| > |M_{1-2}|$ e fazendo:

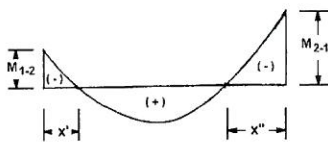
$$k_1 = \frac{M_{2-1} - M_{1-2}}{gl^2}; \quad k_2 = \frac{M_{2-1}}{gl^2}; \quad k_2 - k_1 = \frac{M_{1-2}}{gl^2}$$

$$M_x = \frac{gx}{2}(l-x) + M_{1-2} + \frac{M_{2-1} - M_{1-2}}{l}x$$



Momento positivo máximo para $x = (0,5 + k_1)l$

$$M_{\max} = \left[0,125 + k_2 - 0,5k_1(l - k_1) \right] gl^2 = kg l^2$$



Momento nulo para $x' = k_3 l$; $x'' = k_4 l$

$$k_3 = (0,5 + k_1) - \sqrt{(0,5 + k_1)^2 + 2(k_2 - k_1)}$$

$$k_4 = (0,5 - k_1) - \sqrt{(0,5 - k_1)^2 + 2k_2}$$

CAPÍTULO 4

• Escadas de lanços rectos apoiados nas extremidades dos lanços

4.1 - GENERALIDADES

Estas escadas são as mais correntes nas edificações, sendo constituídas por um ou mais trechos formados por um elemento inclinado associado ou não a um ou dois patamares, Fig.4.1. Estas escadas podem ser utilizadas no interior ou no exterior, ficando no segundo caso aparentes na fachada, apoiadas nas paredes do edifício ou em pilares, associados ou não a elementos salientes em consola.

As escadas interiores são em regra construídas em caixas de escada, conjuntamente com as caixas dos elevadores cuja existência depende do número de pisos do edifício.

Dada a maior importância da disposição dos elementos de apoio deste tipo de escadas, relativamente às escadas exteriores, deve restringir-se o recurso a vigas aparentes apenas ao nível dos pisos, optando-se entre estes por conceber estruturas formadas por lajes que se apoiam pelas extremidades dos lanços aos níveis dos pisos e dos patamares intermédios. A concepção destas escadas deve também ser coordenada com o processo de construção podendo, quanto ao trecho indicado, ter:

- apoio de lanço inclinado na estrutura do piso (com interposição de viga) e no bordo livre do patim, onde transmite reacções de distribuição linear (Fig. 4.1a);
- lanço inclinado associado a um patim intermédio, apoiando o conjunto no piso e na parede da caixa de escada, em interposição de viga na parede (Fig. 4.1b);
- lanço inclinado associado a dois patamares (Fig. 4.1c).

Nas construções de alvenaria resistente os lanços das escadas podem ser executados à medida que progride a execução das paredes, podendo organizar-se o trabalho de modo que, tanto as lajes dos patamares intermédios como as lajes dos pavimentos que dão continuidade aos lanços fiquem apoiados nas paredes transversais; os lanços inclinados devem ser executados sem ligação às paredes que se desenvolvem paralelamente ao eixo das escadas.

Nas construções de betão armado os procedimentos a adoptar podem ser influenciados pela constituição das paredes das caixas, consoante se trate de paredes de betão armado ou de paredes de alvenaria sob a forma de painéis de preenchimento das malhas da estrutura resistente.

No que se refere ao dimensionamento põe-se também as mesmas questões já anteriormente referidas à cerca do encastramento parcial.

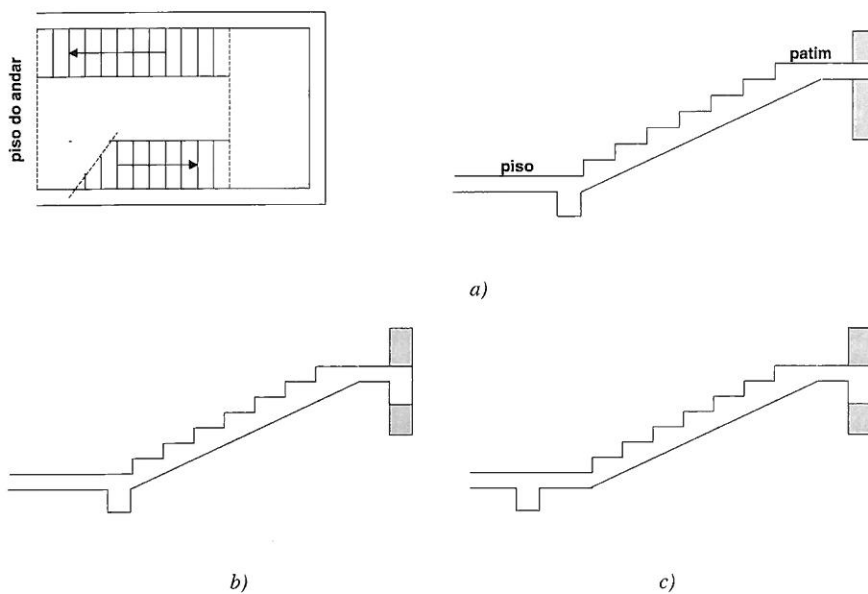


Fig. 4.1 - Tipos de escadas de lanços rectos apoiados nas vigas dos pavimentos

4.2 - LANÇOS CONSTITUÍDOS POR UM SÓ TRECHO INCLINADO

No dimensionamento deste tipo de escadas pode recorrer-se aos formulários anexos; este tipo de estrutura é utilizado designadamente nas construções de escadas prefabricadas em lanços rectos com techo inclinado que se apoia nas lajes dos pisos e do patamar intermédio, em condições semelhantes à representada na Fig.4.2.

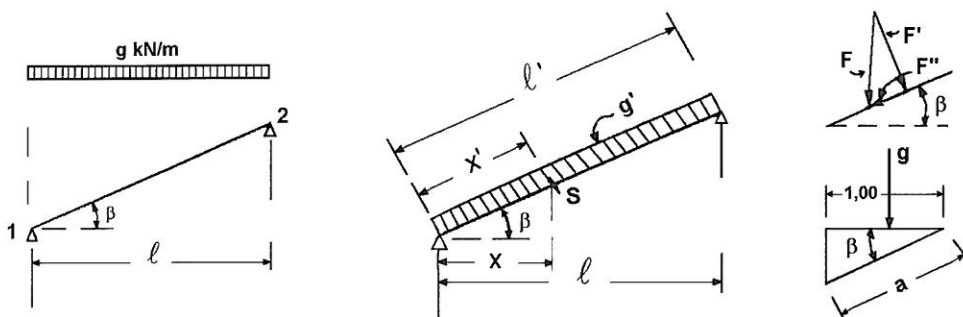


Fig. 4.2 - Socilitações sobre o elemento inclinado de uma escada

As acções actuantes são consideradas uniformemente distribuídas, $(g + q)$ kN/m² de tipo gravítico. Assim, na hipótese da viga simplesmente apoiada, a acção F (kN/m) em projecção horizontal (Fig. 4.2) admite duas componentes, uma F' , na direcção perpendicular ao eixo longitudinal do trecho inclinado (que dá lugar a flexão deste trecho) e outra, F'' , na direcção daquele eixo (dando lugar a esforços normais N). Temos assim:

$$F' = F \cos \beta ; F'' = F \sin \beta$$

e, pelo que diz respeito à flexão, por ser $\cos \beta = \frac{1}{a}$,

$$g' = \frac{F'}{a} = \frac{g \cos \beta}{a} = g \cos^2 \beta \text{ kN / m}$$

$$\ell = \ell' \cos \beta ; x = x' \cos \beta$$

$$M_x = \frac{g' x'}{2} (\ell' - x') = \frac{g}{2} x' (\ell' - x') \cos^2 \beta = \frac{g}{2} x (\ell - x)$$

e, a meio vão, $M_{\ell/2} = \frac{g \ell^2}{8}$

donde se conclui que o vão de cálculo, tem o valor medido na horizontal. Deve ser considerado igual à distância entre eixos de apoio, no caso destes serem bem definidos; não o sendo, tomar o valor do vão real aumentado da espessura da escada a meio vão.

No caso das escadas não serem simplesmente apoiadas, a determinação dos esforços efectua-se como estrutura hiperestática, de acordo com os exemplos seguintes. Pode utilizar-se o formulário que consta dos quadros 4.1 a 4.7.

Os esforços em qualquer secção S são obtidos pelas expressões:

$$\begin{cases} M_x = M_{1-2} + V_1 x - H_1 y - M \\ N_x = V_1 \sin \beta + H_1 \cos \beta - N \\ V_x = V_1 \cos \beta - H_1 \sin \beta - V \end{cases}$$

em M, N, V são respectivamente o momento flector, esforço normal e transversal, devidos às acções aplicadas, em relação à secção S .

Na Fig.4.3 indica-se esquematicamente uma escada deste tipo cujos lanços apoiam em vigas localizadas ao nível dos pisos e nos patamares intermédios, estes últimos ligados à estrutura geral do prédio; no caso de haver necessidade de reforçar as lajes dos patamares, esse esforço deve ficar incluído na espessura dessas lajes.

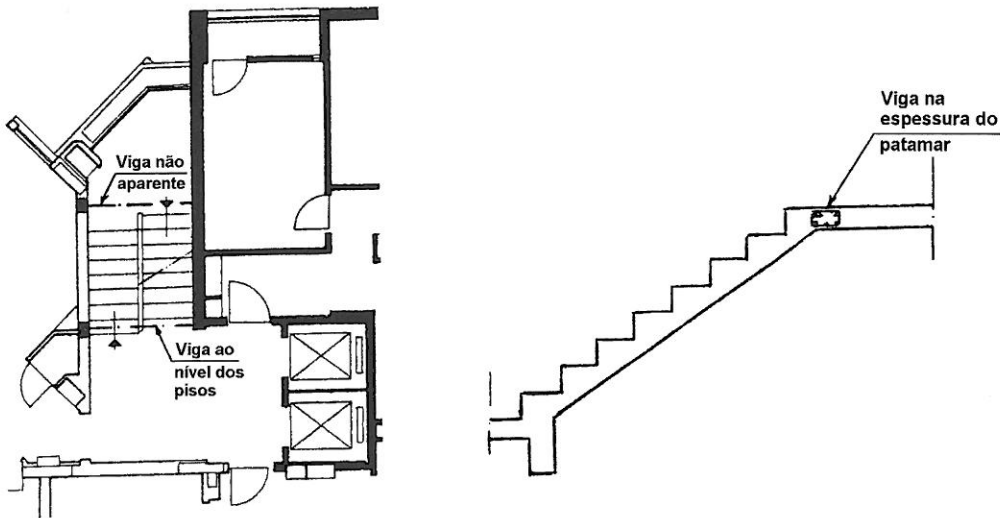


Fig. 4.3 - Vigas ao nível dos pisos e reforço não aparente das lajes do patamar intermédio.

É no entanto preferível dimensionar as lajes dos patamares para a acção que os lanços inclinados lhes transmitem aos bordos em que se apoiam.

Exemplo 4.1 - Escada de acesso a uma varanda em consola, esquematizada nas Fig. 4.4 e 4.5.

Conforme foi já referido, no dimensionamento das escadas considera-se a actuação de acções uniformemente distribuídas, permanentes g (peso próprio e revestimentos, incluindo rebocos das faces laterais e inferior, forro de pedra serrada, argamassa de assentamento, etc.) e sobrecarga fixada no RSA.

É de notar que ao apoio da escada na extremidade da laje da varanda corresponde uma acção adicional para a qual a laje deve ser verificada; dependendo do processo de construção, existe a possibilidade da escada, sendo betonada em conjunto com a laje, exercer um efeito de escora na extremidade da laje, do qual resulta perturbação na distribuição local dos momentos.

Um dos procedimentos consiste na adopção de uma junta, conforme dispositivo indicado na Fig.4.6, executando-se a escada depois da desmoldagem da laje, sendo a junta preenchida com mastique, afim de a manter operacional. Outra solução consiste em optar por um reforço local das armaduras da laje para obviar a fissurações em virtude do efeito de escora, executando a escada depois de desmoldar a laje da varanda.

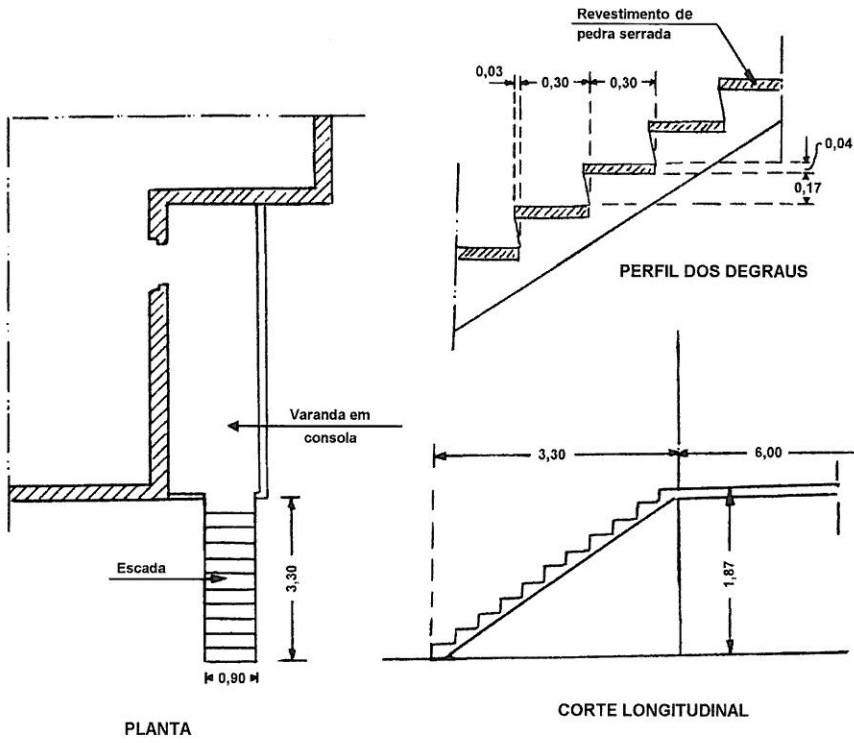


Fig.4.4 - Escada de um lança, apoiada no solo e na extremidade duma varanda em consola

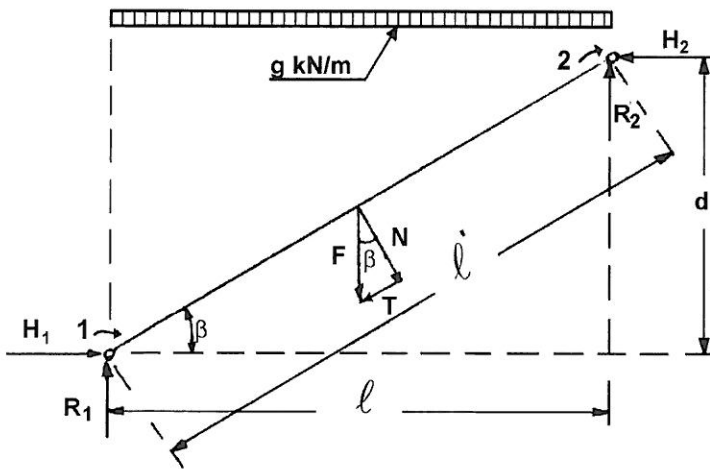


Fig.4.5 - Escada constituída por um lança inclinado

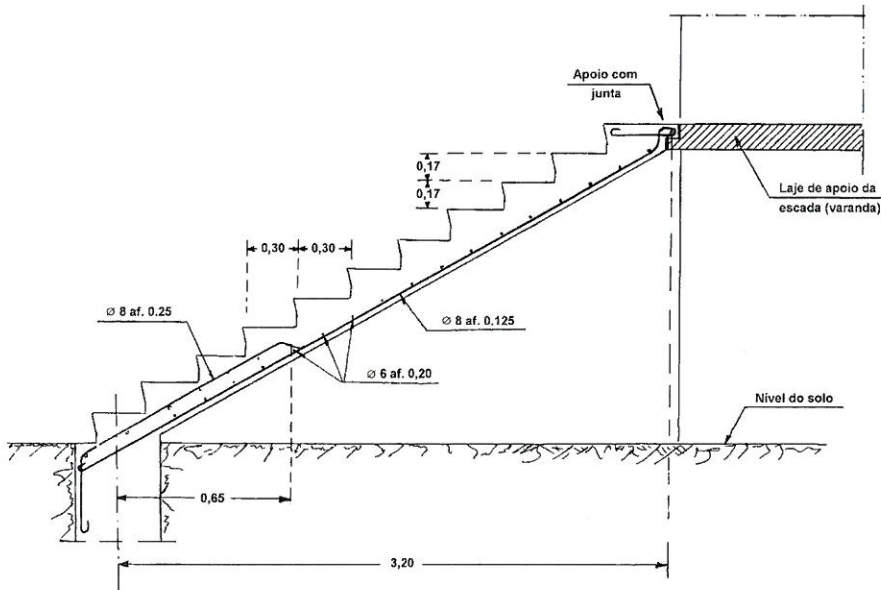


Fig.4.6 - Pormenor da escada do exemplo 4.1

São as seguintes as acções a considerar:

Peso próprio	$0,9 \times 0,13 \times 25,0$	$= 2,93 \text{ kN/m}$
Peso médio dos degraus	$0,9 \times \frac{0,17}{2} \times 25,0$	$= 1,92$
Revestimentos	$0,9 \times 1,5$	$= 1,35$
Sobrecarga	$0,9 \times 3,0$	$= 2,70$
		$8,90 \text{ kN/m}$

Momento flector máximo, na secção a meio vão,

$$M_{\ell/2} = \frac{8,90 \times 3,25^2}{8} = 11,75 \text{ kN.m}$$

Esforço normal máximo N_1 (compressão) e transverso V_1 no apoio 1,

$$N_1 = -g \frac{\ell}{2} \sin \beta = -8,90 \times \frac{3,25}{2} \times 0,4845 = -7,0 \text{ kN}$$

$$V_1 = g \frac{\ell}{2} \cos \beta = 8,40 \times \frac{3,25}{2} \times 0,8748 = 12,7 \text{ kN}$$

$$V_1 = \frac{g\ell}{2} ; H_1 = 0$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{1,80}{3,25} = 0,5531 ; \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1+0,5538^2}} = 0,8748$$

$$\operatorname{sen}\beta = \sqrt{1-0,8748^2} = 0,4845$$

4.3 - LANÇOS SOLIDÁRIOS COM OS PATAMARES

Nas Fig.4.7 a) e b) apresentam-se dois esquemas de lajes de escadas de lanços rectos solidários com os patins, estes respectivamente em número de um ou dois, constituindo estruturas lineares de vão ℓ , apoiadas nas extremidades 1,2 e armadas longitudinalmente.

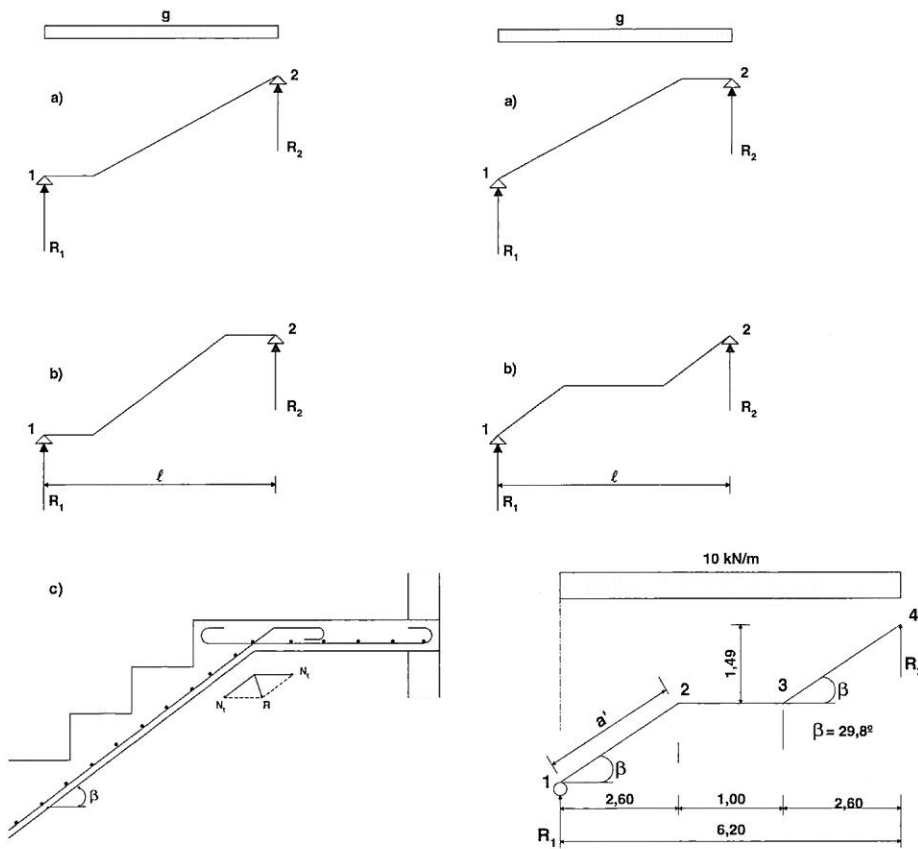


Fig.4.7 - Esquema de escadas de lanços rectos apoiados pelas extremidades

Qualquer deles exige a existência de apoios localizados entre os pisos, ligados à estrutura geral do edifício. Em certas situações (Fig. 4.8), designadamente nas escadas de três lanços entre pisos, pode haver necessidade de apoiar o lanço intermédio nos patamares dos lanços laterais, prolongando através destes últimos as armaduras de flexão do lanço neles apoiado, cujo vão se considera igual à distância em planta dos eixos médios dos patamares em que se apoiam.

A disposição das armaduras deve ter em conta a necessidade de quebrar a sua continuidade nas zonas reentrantes (Fig. 4.7 c) pois a referida continuidade introduziria uma resultante R , dos dois esforços de tracção T , que tenderia a destacar o betão de recobrimento.

Para além do formulário indicado nos quadros 4.1 a 4.7, a determinação dos esforços neste tipo de lajes para escada pode ser feito através de um método de iteração tipo Cross, conforme exemplo 4.3.

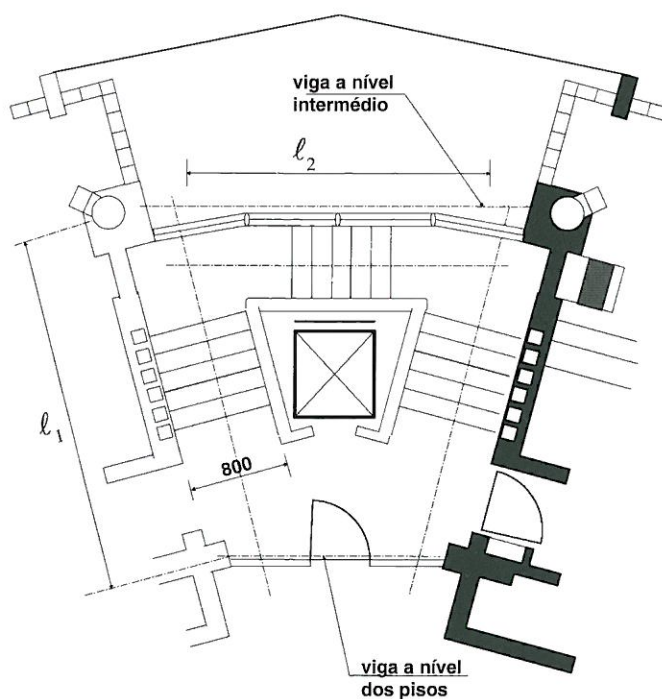


Fig. 4.8 - Escada de três lanços

Exemplo 4.2 - Determinar os esforços actuantes na laje quebrada esquematizada na Fig.4.8a, apoiada nos apoios, devidos à acção duma carga uniformemente distribuída de 10,0 kN/m, sendo constante o momento de inércia das secções da laje.

LAJES E ESCADAS DE BETÃO ARMADO

De acordo com o quadro 4.7 (3):

$$R_1 = R_4 = \frac{g\ell}{2} = \frac{10 \times 6,2}{2} = 31,0 \text{ kN}$$

$$M_{2-1} = M_{3-4} = \frac{ga}{2}(\ell - a) = \frac{10 \times 2,6}{2}(6,2 - 2,6) = 46,8 \text{ kN.m}$$

$$M_{\ell/2} = \frac{g\ell^2}{8} = \frac{10 \times 6,2^2}{8} = 48,1 \text{ kN.m}$$

Em 1-2, nó 1 ($x=0$), $V_1 = R_1 \cos\beta = 26,9 \text{ kN}$;

$$N_1 = R_1 \sin\beta = 15,5 \text{ kN}$$

Verificação $R_1 = \sqrt{26,9^2 + 15,5^2} = 31,0 \text{ kN}$

Em 1-2, à esquerda do nó 2 ($x=a$), $V'_2 = (31,0 - 2,6 \times 10) \cos\beta = 4,33 \text{ kN}$;

$$N_2 = (31,0 - 2,6 \times 10) \sin\beta = 2,48 \text{ kN}$$

Em 2-3, à direita do nó 2 ($x=a$), $V'_2 = 5,0 \text{ kN}$

Verificação

$$V_2'' = \sqrt{4,33^2 + 2,48^2} = 5,0 \text{ kN}$$

A flecha elástica pode ser determinada pelo 1º teorema de Castigliano, sendo o seu valor:

$$f_{max} = 2 \int_0^{\ell/2} \frac{MM'}{EI} ds$$

em que

$$M = \frac{g}{2}(\ell x - x^2); \quad M' = \frac{x}{2}$$

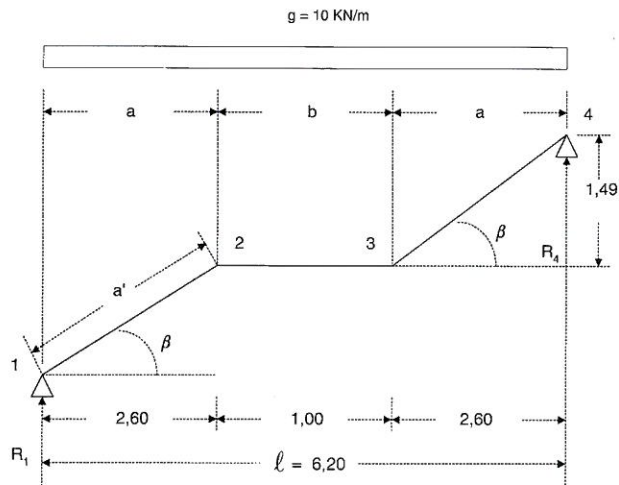


Fig. 4.8 a



sendo M' o momento devido à força $F = 1$ concentrada na secção do meio vão, a que corresponde a máxima flecha.

$$f_{\max} = \frac{g}{2EI} \left[\frac{a'}{a} \int_0^a (\ell x^2 - x^3) dx + \int_a^{\ell/2} (\ell x^2 - x^3) dx \right]$$

uma vez que, no intervalo (0,a) $ds = \frac{dx}{\cos \beta} = \frac{a'}{a} dx$

$$f_{\max} = \frac{g}{384EI} \left[5\ell^4 + 16a^2(4b + 5a)(a'-a) \right]$$

valor este 10% maior que o valor correspondente à viga de eixo rectilíneo de igual vão e com o mesmo momento de inércia I.

$$f_{\max} = \frac{5g\ell^4}{384EI}$$

Exemplo 4.3 - Determinar os esforços actuantes na laje quebrada esquematizada na Fig.4.9, encastrada nos apoios sob a acção uniformemente distribuida de 10,0 kN/m sendo o momento de inércia variável: patamares $I_1 = I$, lanço $I_2 = 2,8I$ (momentos de inércia) correspondentes a lajes de espessura de 11 cm nos patamares e de 15,5 cm no lanço inclinado.

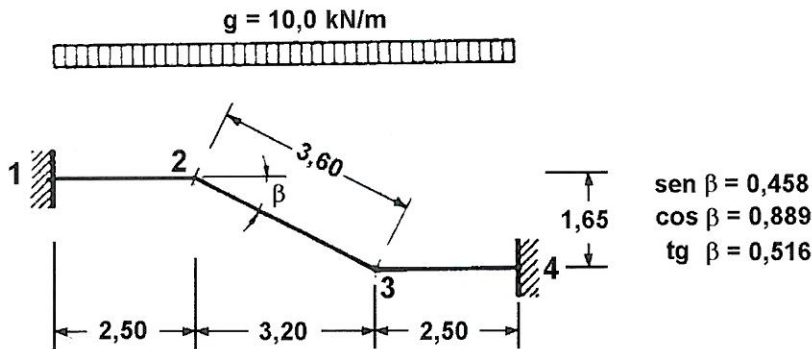


Fig. 4.9 - Laje de eixo quebrado encastrado nos apoios

LAJES E ESCADAS DE BETÃO ARMADO

O problema é resolvido em duas etapas, considerando na 1ª que os nós 2 e 3 apenas rodam e considerando na 2ª etapa o deslocamento destes nós no sentido vertical. Tudo se passa, na 1ª etapa como se aplicassem nos nós 2 e 3 forças verticais F , de grandeza desconhecida (iguais entre si, dada a simetria), dirigidas de baixo para cima, as quais são anuladas na 2ª etapa.

Momentos de encastramento perfeito:

$$M_{1-2} = M_{2-1} = \frac{10,0 \times 2,5^2}{12} = 5,21 \text{ kN.m}$$

$$M_{2-3} = M_{3-2} = \frac{10,0 \times 3,2^2}{12} = 8,53 \text{ kN.m}$$

Na 1ª etapa a estrutura é simétrica e está simetricamente carregada, tomando-se para rigidezes os seguintes valores:

$$K_{2-1} = \frac{4EI}{2,5} = 1,6EI \quad K_{2-3} = \frac{2EI_2}{3,60} = 1,556 EI$$

Coefficientes de distribuição:

$$\frac{1,60}{1,60 + 1,556} = 0,507; \quad \frac{1,556}{1,60 + 1,556} = 0,493$$

Na Fig. 4.10 apresenta-se o desenvolvimento dos cálculos relativos à 1ª etapa.

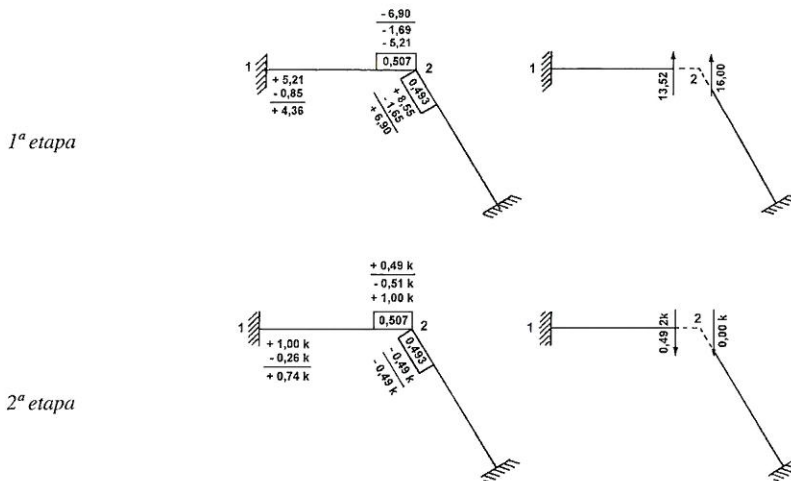


Fig. 4.10 - Distribuição de momentos e esforços transversos correspondentes à 1ª e à 2ª etapas do cálculo.

Esforços transversos:

$$V_{12} = \frac{10,0 \times 2,5}{2} - \frac{6,90 - 4,36}{2,5} = 11,48 \text{ kN}$$

$$V_{21} = \frac{10,0 \times 2,5}{2} + \frac{6,90 - 4,36}{2,5} = 13,52 \text{ kN}$$

$$V_{23} = \frac{3,2 \times 10}{2} = 16,0 \text{ kN}$$

$$F = 13,52 + 16,00 = 29,52 \text{ kN}$$

A condição de equilíbrio do nó 2 é expressa por:

$$F - 0,492 k = 0; \quad k = \frac{29,52}{0,492} = 60,0$$

Teremos portanto, sobrepondo as duas etapas anteriormente consideradas,

$$M_{1-2} = M_{2-3} = -(4,36 + 0,740 \times 60,0) = -48,8 \text{ kN.m}$$

$$M_{2-1} = M_{2-3} = M_{3-2} = M_{3-4} = -6,90 + 0,49 \times 60,0 = +36,3 \text{ kN.m}$$

$$V_1 = 11,48 + 0,492 \times 60,0 = 41,0 \text{ kN}$$

$$V_{2-1} = 13,52 - 0,492 \times 60,0 = -16,0 \text{ kN}$$

$$V_{2-3} = 16,0 \cos 27,3^\circ = 16,0 \times 0,889 = 14,2 \text{ kN}$$

Momento a meio vão:

$$M_{\ell/2} = -48,8 + 41,0 \times \frac{8,2}{2} - \frac{10 \times 8,2^2}{8} + 35,2 \text{ kN.m}$$

Verificação:

$$48,8 + 35,2 = \frac{g\ell^2}{8} = 84,0 \text{ kN.m}$$

LAJES E ESCADAS DE BETÃO ARMADO

Temos finalmente os esquemas representativos dos esforços e deformações indicados na Fig.4.11.

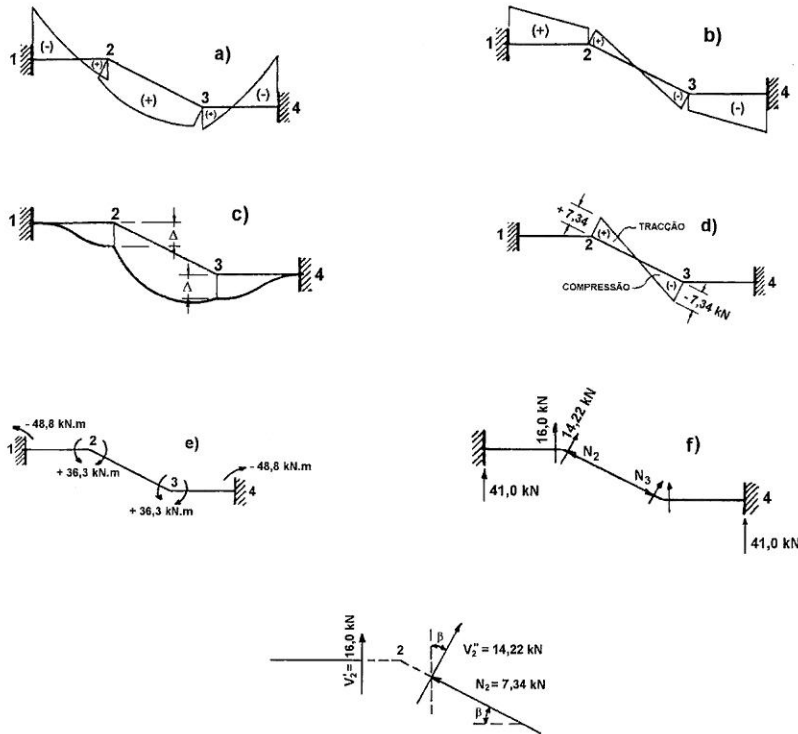


Fig.4.11 - Esforços finais nos nós, diagramas de momentos flectores, esforços transversos e normais e deformada, correspondentes à estrutura esquematizada na Fig.4.9

Equilíbrio do nó 2: $V' = V_1 - N_F = 41,0 - 2,5 \times 10 = 16,00$ kN valor que permaneceu imediatamente à direita do nó 2:

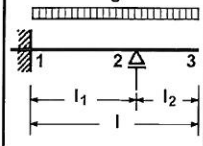
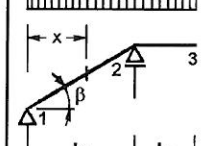
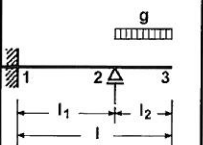
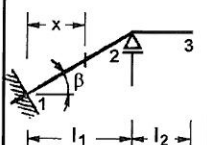
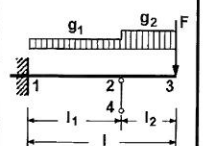
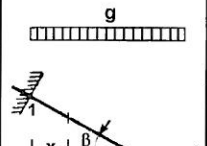
$$V_2'' = 16,00 \cos\beta = 14,22 \text{ kN}; \quad N_2 = 16,00 \sin\beta = 7,34 \text{ kN}$$

$$\sqrt{14,22^2 + 7,34^2} = 16,00 \text{ kN}$$

Quadro 4.1 - Lanços simples de escada

	$V_1 = V_2 = \frac{g\ell}{2}; H_1 = H_2 = \frac{g\ell}{2} \operatorname{tg}\beta$ $R_1 = \frac{g\ell}{2 \cos\beta}$ $M_x = \frac{gx}{2}(\ell - x)$ $M_{0,5\ell} = \frac{g\ell^2}{8}$ $V_x = g\left(\frac{\ell}{2} - x\right); N_x = \frac{g\ell}{2} \operatorname{tg}\beta$		$R_1 = R_2 = \frac{g\ell}{2}$ $H_1 = H_2 = 0$ $M_x = \frac{gx}{2}(\ell - x)$ $M_{0,5\ell} = \frac{g\ell^2}{8}$ $V_x = g\left(\frac{\ell}{2} - x\right) \cos\beta$ $N_x = g\left(\frac{\ell}{2} - x\right) \operatorname{sen}\beta$
	$R_1 = R_2 = V_1 = V_2 = \frac{g\ell}{2}$ $H_1 = H_2 = 0$ $M_x = \frac{gx}{2}(\ell - x)$ $M_{0,5\ell} = \frac{g\ell^2}{8}$ $V_x = g\left(\frac{\ell}{2} - x\right) \cos\beta$ $N_x = g\left(\frac{\ell}{2} - x\right) \operatorname{sen}\beta$		$V_1 = \frac{g\ell}{2}(2 - \cos^2\beta)$ $V_2 = \frac{g\ell}{2} \cos^2\beta$ $H_1 = H_2 = \frac{g\ell}{2} \operatorname{sen}\beta \cos\beta$ $R_2 = \frac{g\ell}{2} \cos\beta$ $M_x = \frac{gx}{2}(\ell - x)$ $V_x = g\left(\frac{\ell}{2} - x\right) \cos\beta$ $N_x = g(\ell - x) \operatorname{sen}\beta$
	$V_1 = V_2 = \frac{g\ell}{2}; -H_1 = H_2 = \frac{g\ell}{2} \operatorname{tg}\beta$ $R_1 = R_2 = \frac{g\ell}{2 \cos\beta}$ $M_x = \frac{gx}{2 \cos^2\beta}(\ell - x)$ $V_x = \frac{g}{2 \cos^2\beta}(\ell - 2x)$ $N_x = 0$		$V_1 = g\ell; V_2 = 0$ $H_1 = R_2 = \frac{g\ell}{2 \operatorname{tg}\beta}$ $M_x = \frac{gx}{2}(\ell - x)$ $V_x = g\left(\frac{\ell}{2} - x\right) \cos\beta$ $N_x = \frac{g}{2 \operatorname{sen}\beta} \left[\ell + (\ell - 2x) \operatorname{sen}^2\beta \right]$
	$V_1 = 0,375g\ell; V_2 = 0,625g\ell$ $R_1 = \frac{3g\ell}{8 \cos\beta}$ $H_1 = H_2 = 0,375g\ell \operatorname{tg}\beta$ $M_{2,-1} = -\frac{g\ell^2}{8}; M_{\max} = 0,0704g\ell^2$ $M_x = \frac{gx}{8}(3\ell - 4x)$ $V_x = \frac{g}{8}(3\ell - 8x)$ $N_x = 0,375g\ell \operatorname{tg}\beta$		$V_1 = V_2 = \frac{g\ell}{2}; H_1 = H_2 = 0$ $M_{1,2} = M_{2,-1} = -\frac{g\ell^2}{12}; M_{n,5} = \frac{g\ell^2}{24}$ $M_x = \frac{g}{12} \left[6x(\ell - x) - \ell^2 \right]$ $V_x = g\left(\frac{\ell}{2} - x\right) \cos\beta$ $N_x = g\left(\frac{\ell}{2} - x\right) \operatorname{sen}\beta$

Quadro 4.2 - Lanços rectos prolongados em consola

<p>1</p> 	$R_1 = \frac{g}{8\ell_1}(5\ell_1^2 - 6\ell_2^2)$ $R_2 = \frac{g}{8\ell_1}(6\ell_2^2 + 8\ell_1\ell_2 + 3\ell_1^2)$ $M_{1-2} = -\frac{g}{8}(2\ell_2^2 - \ell_1^2)$ $M_{2-1} = M_{2-3} = -\frac{g\ell_2^2}{2}$ $M_{\max} = \frac{g\ell_1^2}{128} \left[36\left(\frac{\ell_2}{\ell_1}\right)^4 - 28\left(\frac{\ell_2}{\ell_1}\right)^2 + g \right]$ <p>(em 1-2) para $x = \frac{5}{8}\ell_1 - \frac{3}{4}\frac{\ell_2^2}{\ell_1}$</p>	<p>4</p> 	$R_1 = \frac{g}{2\ell_1}(\ell_1^2 - \ell_2^2)$ $R_2 = \frac{g}{2\ell_1}(\ell_1^2 + \ell_2^2)$ $M_{2-1} = M_{2-3} = -\frac{g\ell_2^2}{2}$ $M_{\max} = \frac{g}{8\ell_1^2}(\ell_1 + \ell_2)^2(\ell_1 - \ell_2)^2$ <p>para $x < \ell_1$</p> $V_x = \frac{g}{2\ell_1}(\ell_1^2 - \ell_2^2 - 2x\ell_1) \cos\beta$ $N_x = \frac{g}{2\ell_1}(\ell_1^2 - \ell_2^2 - 2x\ell_1) \sin\beta$ <p>para $x > \ell_1$</p> $V_x = g(\ell - x); N_x = 0$
<p>2</p> 	$R_1 = -\frac{3g\ell_2^2}{4\ell_1}$ $R_2 = \frac{g\ell_2(4\ell_1 + 3\ell_2)}{4\ell_1}$ $M_{1-2} = \frac{g\ell_2^2}{4}$ $M_{2-1} = M_{2-3} = -\frac{g\ell_2^2}{2}$	<p>5</p> 	$R_1; R_2; M_{\max} \text{ como no 1}^\circ \text{ caso}$ <p>para $x < \ell_1$</p> $V_x = \frac{g}{8\ell_1}(5\ell_1^2 - 6\ell_2^2 - 8x\ell_1) \cos\beta$ $N_x = \frac{g}{8\ell_1}(5\ell_1^2 - 6\ell_2^2 - 8x\ell_1) \sin\beta$ <p>para $x > \ell_1$</p> $V_x = g(\ell - x); N_x = 0$
<p>3</p> 	$R_1 = \frac{5}{8}g_1\ell_1 + \frac{3}{4}\frac{g_2\ell_2^2}{\ell_1} + \frac{3\ell_2}{2\ell_1}F$ $R_2 = \frac{3}{8}g_1\ell_1 + g_2\ell_2 \left(1 + \frac{3\ell_2}{4\ell_1}\right) + F \left(1 + \frac{3\ell_2}{2\ell_1}\right)$ $M_{1-2} = -\left(\frac{g_1\ell_1^2}{8} + \frac{g_2\ell_2^2}{4} + \frac{F\ell_2}{2}\right)$ $M_{2-1} = -\left(\frac{g_2\ell_2^2}{2} + F\ell_2\right)$	<p>6</p> 	$R_1; R_2; M_{\max} \text{ como em 5}$ <p>para $x < \ell_1$</p> $V_x = \frac{g}{8\ell_1}(5\ell_1^2 - 6\ell_2^2 - 8x\ell_1) \cos\beta$ $N_x = \frac{g}{8\ell_1}(5\ell_1^2 - 6\ell_2^2 - 8x\ell_1) \sin\beta$ <p>para $x > \ell_1$</p> $V_x = g(\ell - x); N_x = 0$



Quadro 4.3 - Lanços de escadas com patamar apoiado

	$R_1 = \frac{g}{2\ell} b^2; R_3 = \frac{g}{2\ell} b(a + \ell)$ $M_{2-1} = M_{2-3} = \frac{g}{2\ell} ab^2$ $y < d \begin{cases} V_x = \frac{g}{2\ell} \frac{ab^2}{a'} \\ N_x = \frac{gd}{2} \frac{db^2}{a'} \end{cases} \quad y = d \begin{cases} V_x = g \left[\frac{b^2}{2\ell} - (x - a) \right] \\ N_x = 0 \end{cases}$
	$R_1 = \frac{g}{2\ell} a(\ell + b); R_3 = \frac{g}{2\ell} a^2; M_{2-1} = M_{2-3} = \frac{g}{2\ell} a^2 b$ $y < d \begin{cases} V_x = \frac{ga}{2a'\ell} [a(\ell + b) - 2\ell x] \\ N_x = \frac{gd}{2a'\ell} [a(\ell + b) - 2\ell x] \end{cases} \quad y = d \begin{cases} V_x = \frac{g}{2\ell} a^2 \\ N_x = 0 \end{cases}$
	$R_1 = R_3 = \frac{g\ell}{2}; M_{2-1} = M_{2-3} = \frac{ga^2 b}{2}$ $y < d \begin{cases} V_x = \frac{ga}{2a'} (\ell - 2x) \\ N_x = \frac{gd}{2a'} (\ell - 2x) \end{cases} \quad y = d \begin{cases} V_x = -\frac{gd^2}{2\ell} \\ N_x = 0 \end{cases}$

(*) Estas estruturas são isostáticas, correspondendo-lhes reacções verticais nos apoios 1 e 3, por ser o apoio 3 deslocável no sentido horizontal e o apoio 1 fixo, no que se refere a deslocamentos.

Quadro 4.4 - Lanço de escada e patamar articulado nos apoios

$$k = \left(\frac{sI_1}{bI_2} + 1 \right)$$

<p>1</p>	$V_1 = \frac{gb}{8k}(4k+1); V_3 = \frac{gb}{8k}(4k-1)$ $M_{2-1} = M_{2-3} = -\frac{gb^2}{8k}; H = \frac{gb}{8dk}(4ak + \ell)$ <p>Em 1-2, $V_x = \frac{1}{a}(V_1a + Ha)$; $N_x = \frac{1}{a}(V_1d + Ha)$</p>
<p>2</p>	$V_1 = \frac{ga}{8bk} [8bk + (k-1)a]; V_3 = -\frac{k-1}{8bk} ga^2$ $M_{2-1} = M_{2-3} = -\frac{k-1}{8k} ga^2; H = \frac{ga^2}{8bdk} (4bk + (k-1)\ell)$ <p>Em 1-2, $V_x = \frac{1}{a}(V_1a - Hd - gax)$; $N_x = \frac{1}{a}(V_1d + Ha - gdx)$</p>
<p>3</p>	$V_1 = \frac{ga}{8bk} \left[(\ell^2 + 3b\ell + 3ab)k + (b-a)\ell \right];$ $V_3 = \frac{g}{8bk} \left[k(4b^2 - a^2) + (a-b)\ell \right]$ $M_{2-1} = M_{2-3} = -\frac{g}{8k} \left[(b-a)\ell + ka^2 \right]; H = \frac{g}{8bdk} \left[(4ak + b)b\ell - (k-1)a^2d \right]$ <p>Em 1-2, $V_x = \frac{1}{a} \left[V_1a - Hd - gax \right]; N_x = \frac{1}{a} \left[V_1d + Ha - gdx \right]$</p>

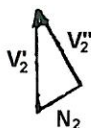
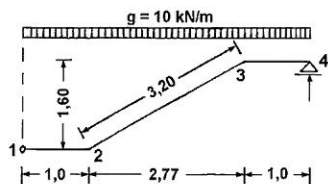
Quadro 4.5 - Lanço e patamar de escada encastrado nos apoios

$$k = 1 + \frac{SI_1}{bI_2}$$

	$V_1 = \frac{gb}{8k}(3k+1); V_3 = \frac{gb}{8k}(5k-1); H = \frac{gb}{8dk}(3ak+\ell)$ $M_{1-2} = \frac{gb^2}{24k}; M_{2-1} = M_{2-3} = -\frac{gb^2}{12k}; M_{3-2} = -\frac{gb^2}{24k}(3k-1)$ $y < d, V_x = \frac{1}{a'}(aV_1 - dH); N_x = \frac{1}{a'}(dV_1 + aH)$
	$V_1 = \frac{ga}{8bk} [8bk + a(k-1)]; V_3 = \frac{ga^2}{8bk}(k-1); H = \frac{ga^2}{8bdk} [(4b-a)k - \ell]$ $M_{1-2} = \frac{ga^2}{24k}(2k+1); M_{2-1} = M_{2-3} = \frac{ga^2}{12k}(k-1); M_{3-2} = -\frac{ga^2}{24k}(k-1)$ $y < d, V_x = \frac{1}{a'}(aV_1 - dH); N_x = \frac{1}{a'}(dV_1 + aH)$
	$V_1 = \frac{g}{8bk} [(4\ell^2 - b^2 - 3a^2)k - \ell(a-b)]; V_3 = \frac{g}{8bk} [(5b^2 - a^2)k + \ell(a-b)]$ $H = \frac{g\ell}{8dbk} [a(a+3b)k - (a-b)\ell]$ $M_{1-2} = -\frac{g}{24k} [(2k+1)d^2 - b^2]; M_{2-1} = M_{2-3} = -\frac{g}{12k} [b^2 + (k-1)d^2]$ $M_{3-2} = -\frac{g}{24k} [(3k-1)b^2 - (k-1)a^2]$

Quadro 4.6 - Lanço de escada com dois patamares articulados nos apoios

<p>1</p>	$R_1 = R_4 = ga; \quad H = 0; \quad M_{\ell/2} = \frac{ga^2}{2}$ $M_{\max} = M_{2-1} = M_{2-3} = M_{3-2} = M_{3-4} = \frac{ga^2}{2}$ <p>Em 1-2, $V_x = g(a-x); \quad M_x = \frac{gx}{2}(2a-x)$</p> <p>Em 2-3, $V_x = 0; \quad N_x = 0; \quad M_x = \frac{ga^2}{2}$</p>
<p>2</p>	$R_1 = R_4 = \frac{gb}{2}; \quad H = 0; \quad M_{\ell/2} = \frac{gb}{8}(\ell + 2a)$ $M_{2-1} = M_{2-3} = M_{3-2} = M_{3-4} = \frac{gab}{2}$ <p>Em 1-2, $V_x = \frac{gb}{2}; \quad N_x = 0; \quad M_x = \frac{gbx}{2}$</p> <p>Em 2-3, $V_x = \frac{gb}{2a'}(\ell - 2x); \quad N_x = \frac{gd}{2a'}(\ell - 2x)$</p>
<p>3</p>	$R_1 = R_4 = \frac{g\ell}{2}; \quad H = 0; \quad M_{\ell/2} = \frac{g\ell^2}{8}$ $M_{2-1} = M_{2-3} = M_{3-2} = M_{3-4} = \frac{ga\ell}{2}$ <p>Em 1-2, $V_x = g\left(\frac{\ell}{2} - x\right); \quad N_x = 0;$</p> <p>Em 2-3, $V_x = \frac{gb}{2a'}(\ell - 2x); \quad N_x = \frac{d}{2a'}(\ell - 2x)$</p>



Verificação do equilíbrio do nó 2

Esf. transversos

$$V_2^1 = g\left(\frac{\ell}{2} - a\right) = 10\left(\frac{4,77}{2} - 1,0\right) = 13,85 \text{ kN}$$

$$V_2'' = \frac{gb}{a'}\left(\frac{\ell}{2} - a\right) = \frac{10 \times 2,77}{3,20} = \frac{4,77}{2} - 1,0 = 11,99 \text{ kN}$$

Esf. normal

$$N_2 = \frac{gd}{a'}\left(\frac{\ell}{2} - a\right) = \frac{10 \times 1,60}{3,20} = \frac{4,77}{2} - 1,0 = 6,93 \text{ kN}$$

Quadro 4.7 - Dois lanços apoiados com patamar intermédio

<p>1</p>	$R_1 = R_4 = \frac{gb}{2}; M_{\ell/2} = \frac{gb}{8}(2\ell - b)$ $M_{2-1} = M_{2-3} = M_{3-2} = M_{3-4} = \frac{gab}{2}$ $\text{Em } 1-2, V_x = \frac{ga^2b}{a'}; N_x = \frac{gabd}{a'}$ $\text{Em } 2-3, V_x = \frac{g}{2} [b - 2(x - a)]; N_x = 0$
<p>2</p>	$R_1 = R_4 = ga; M_{\ell/2} = \frac{ga^2}{2}$ $M_{2-1} = M_{2-3} = M_{3-2} = M_{3-4} = \frac{ga^2}{2}$ $\text{Em } 1-2, V_x = \frac{ga^2}{a'}(1-x); N_x = \frac{gd}{a'}(1-x)$ $\text{Em } 2-3, V_x = 0; N_x = 0$
<p>3</p>	$R_1 = R_4 = \frac{g\ell}{2}; M_{\ell/2} = \frac{g\ell^2}{8}$ $M_{2-1} = M_{2-3} = M_{3-2} = M_{3-4} = \frac{ga}{2}(\ell - a)$ $\text{Em } 1-2, V_x = \frac{ga}{2a'}(\ell - 2x); N_x = \frac{gd}{2a'}(\ell - 2x)$ $\text{Em } 2-3, V_x = \frac{g}{2}(\ell - 2x); N_x = 0$

2.^a PARTE

ESCADAS ESPECIAIS

CAPÍTULO 5

• Escada simétrica de lanços rectos com patim intermédio sem apoios exteriores

5.1 - GENERALIDADES

Estas escadas são abertas, sem caixa, constituídas por dois lanços rectos em continuidade com um patim intermédio, o qual não dispõe de qualquer apoio exterior; os lanços apoiam-se pelas suas extremidades ao nível dos pisos do edifício, Fig. 5.1

Como sucede com as escadas de lanços rectos anteriormente estudadas, as que neste capítulo se apresentam podem ser analisadas como estruturas lineares; a diferença fundamental reside na necessidade de abordar um problema espacial.

Considerando a actuação de acções verticais uniformemente distribuídas q , colocadas em duas posições simétricas, cobrindo os lanços e o patim intermédio, reduz-se para 2 o grau de hiperestaticidade da estrutura no caso da encastramento nos apoios. O estudo correspondente à escada apoiada com articulações nos apoios é deduzido da análise do caso anterior.

O modelo de cálculo a três dimensões resulta da separação de cada elemento de escada em dois lanços simétricos, através do corte, pelo plano médio da escada, em dois lanços simétricos em consola, cada um deles constituído por um lanço e meio patim, sendo o primeiro encastrado ao nível do piso. A extremidade livre de cada uma das consolas pode deslocar-se na direcção vertical mas é impedida de se deformar na horizontal pelo lanço a que está ligada.

Como é habitual, adoptamos dois sistemas de eixos diferentes, um privativo da barra na Fig. 5.1, o outro de orientação geral da estrutura, indicado na Fig. 5.4.

De acordo com as Fig. 5.2 e 5.3 adoptamos a seguinte simbologia:

ℓ - vão do lanço, em projecção horizontal;

a - largura do lanço e do patamar;

b - largura da bomba da escada;

d - altura do lanço;

d/n - altura de um degrau;

ℓ/n - largura de um degrau;

n - número de degraus do lanço;

e' - espessura da laje do lanço;

e'' - espessura da laje do patim;

β - ângulo de inclinação do lanço;

$$d/\ell = \operatorname{tg}\beta; \operatorname{sen}\beta = d/\ell'; \operatorname{cos}\beta = \frac{\ell}{\ell'}; \ell' = \sqrt{d^2 + \ell^2}$$

q' - acção uniformemente distribuída no lanço;
 q'' - acção uniformemente distribuída no patim;
 γ - coeficiente $\gamma = r/\ell$.

Na maior parte dos casos da prática b é pequena em relação a $r = (a + b)/2$, podendo tomar-se então $r = a/2$.

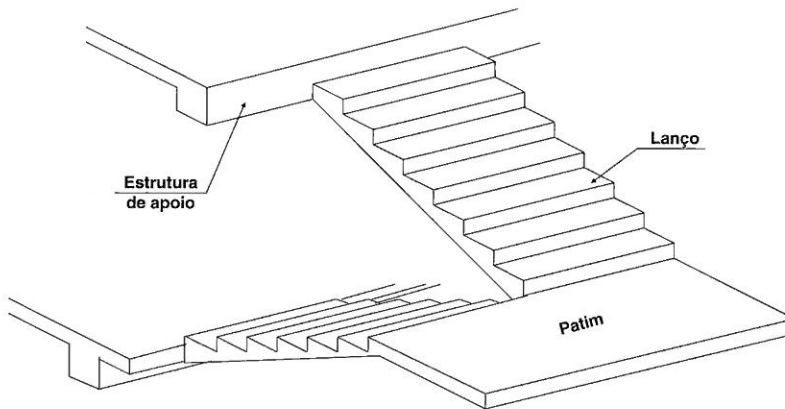


Fig. 5.1 - Escada de dois lanços rectos com patamar intermédio livre

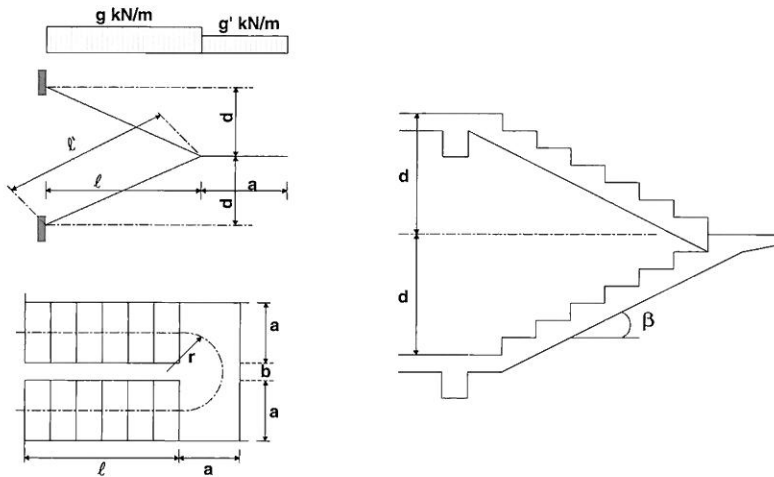


Fig. 5.2 - Notações, acções actuantes e degraus dos momentos flectores

5.2 - ESTUDO DESTE TIPO DE ESCADA

5.2.1 - MÉTODO DE RESOLUÇÃO

O problema é resolvido partindo da estrutura isostática correspondente, tomando por incógnitas hiperestáticas $X_1 = 1$ (momento flector $M_{1,2}$ no apoio 1 do 2º lanço, onde se apoia no piso do edifício, Fig. 5.1) e $X_2 = 1$ (momento de flexão $M_{2,1}$ no apoio 2, na secção média do patim, de separação entre as duas metades da escada, e que dá lugar a esforços da torção dos lanços e no patim.

Começamos por determinar as reacções e os esforços isostáticos que correspondem ao sistema-base, referidos no lanço a um sistema de eixos ortogonais (x, y, z) com origem numa das extremidades do lanço, coincidindo x com o eixo longitudinal inclinado do lanço, y com o eixo transversal e z com o eixo perpendicular ao plano dos dois anteriores, Fig. 5.3.

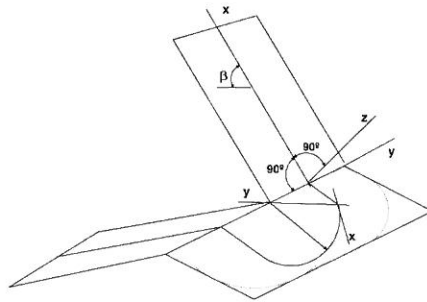


Fig. 5.3 - Esquema da estrutura linear equivalente à estrutura espacial

Para o patim consideramos um referencial móvel, sendo x o eixo, contido no plano horizontal médio do patamar, tangente à linha média do quarto de circunferência, de raio $r = (a + b)/2$, y um eixo perpendicular a x, contido no mesmo plano, e z um eixo perpendicular ao plano xy (Fig. 5.5).

Este sistema isostático constitui a base de referência relativamente à qual se torna necessário determinar seis deslocamentos (translações e rotações); são elas:

δ'_{20} - rotação do apoio 2 quando actua no lanço uma acção distribuída $g' = 1$

δ''_{10} - rotação do apoio 1 quando actua no patim uma acção distribuída $g'' = 1$

δ_{11} - rotação no apoio 1 quando nele actua um momento $X_1 = 1$

δ_{12} - rotação no apoio 1 quando actua no apoio 2 um momento $X_2 = 1$

δ_{21} - rotação do apoio 2 quando actua no apoio 1 um momento $X_1 = 1$

δ_{22} - rotação no apoio 2 quando nele actua o momento $X_2 = 1$



A expressão geral que permite determinar os valores de δ_{ik} é:

$$EI_x \delta_{xi} = \int M_{xi} M_{xk} ds + \int T_{xi} T_{xk} \frac{EI_x}{GJ} ds \dots (1)$$

que só inclui as parcelas que correspondem às deformações devidas aos momentos de flexão M_x e de torção T_x , por serem desprezáveis os contributos dos esforços normais N e transversos V , face aos valores dos deslocamentos (translações ou rotações) e também os do momento flector M_y , em virtude da grande rigidez à flexão da estrutura no seu plano.

Os momentos e as forças são positivas quando:

- ao momento M_x correspondem tracções na face inferior da laje;
- o momento M_y produz tracções nas faces interiores da escada;
- o momento M_i roda a secção no sentido do movimento dos ponteiros do relógio;
- o esforço normal N é uma força de tracção.

Na referida expressão as variáveis têm o seguinte significado:

I_x, I_y - momento de inércia em relação aos eixos de referência das barras $x - x$ e $y - y$, respectivamente, Fig. 5.4 (corte transversal do lanço);

J - momento de inércia à torção;

E, G - módulos de elasticidade;

M_{xi}, M_{xk} - momentos flectores que rodam a secção transversal da barra onde estão aplicados, respectivamente em torno do eixo $x - x$ e do eixo $y - y$, Fig. 5.4

T_x - momento de torção, que roda a secção em torno do eixo $x - x$ perpendicular ao plano da secção

M_{xi}, M_{xk} - momentos flectores M_x devidos a $X_i = 1$ e $X_k = 1$;

X_i - incógnitas hiperestáticas na secção i ;

δ_{ii}, δ_{ik} - deformações (rotação ou deslocamento) na secção i , na direcção de X_i , devidas respectivamente a $X_i = 1$ (aplicada na secção i) e $X_k = 1$ (aplicada na secção k);

δ_{io} - deformação (rotação ou deslocamento) na secção i , na direcção de X_i , devida à acção exterior q .

Na referida expressão os elementos diferenciais são:

- no patim $ds = r d\phi$

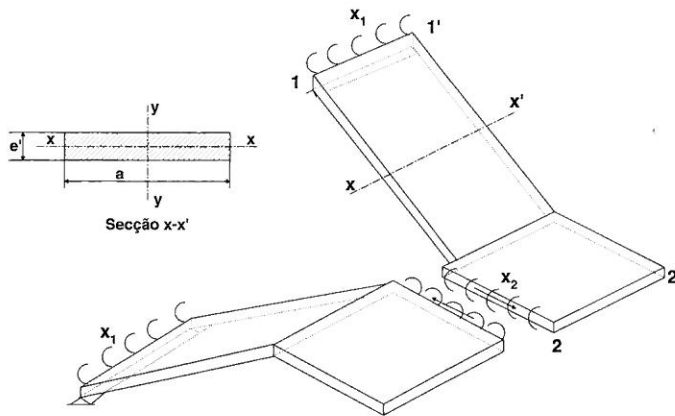


Fig. 5.4 - Sistema de referência

- no lanço $ds = \frac{dx}{\cos \beta}$

A rigidez de torção é: $GJ = \frac{2EI_x I_y}{I_x + I_y}$

sendo porém I_y muito maior que I_x podemos tomar

$$\frac{EI_x}{GJ} = \frac{I_x + I_y}{2I_y} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{I_x}{I_y} \right)$$

Convém frisar que, sendo desprezáveis as contribuições de V , N e M_y para a deformação da estrutura, isso não impede que estes esforços também não tenham que ser considerados, como os restantes esforços, para o dimensionamento das secções resistentes.

Pode considerar-se $\left(1 + \frac{I_x}{I_y} \right) = 1$ desde que $I_x \leq 0,01I_y$, o que normalmente se verifica

nos casos que ocorrem na prática; com efeito, sendo, por exemplo $a = 100$ cm e $e = 10$ cm, resulta

$$\frac{I_x}{I_y} = \frac{100 \times 10^3}{12} \times \frac{12}{10 \times 100^3} = 0,01$$

o que permite simplificar as expressões finais.

O problema anteriormente enunciado resolve-se pelo sistema de duas equações a duas incógnitas X_1 e X_2

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta'_{10} \\ \delta'_{20} \end{bmatrix} = 0$$

que permite determinar directamente os valores das incógnitas hiperestáticas; no caso da actuação de acções uniformemente distribuídas q' no lanço e q'' no patim, resulta, respectivamente:

$$(2) \begin{cases} X_1' = \frac{\delta'_{10} \delta_{22} - \delta'_{20} \delta_{12}}{\delta_{12}^2 - \delta_{11} \delta_{22}} = -k_1 q' \ell^2 \\ X_2' = \frac{\delta'_{20} \delta_{11} - \delta'_{10} \delta_{12}}{\delta_{12}^2 - \delta_{11} \delta_{22}} = -k_2 q' \ell^2 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} X_1'' = \frac{\delta''_{10} \delta_{22} - \delta''_{20} \delta_{12}}{\delta_{12}^2 - \delta_{11} \delta_{22}} = -k_3 q'' \ell^2 \\ X_2'' = \frac{\delta''_{20} \delta_{11} - \delta''_{10} \delta_{12}}{\delta_{12}^2 - \delta_{11} \delta_{21}} = -k_4 q'' \ell^2 \end{cases}$$

Na hipótese de encastramento perfeito nos apoios os esforços finais M_x , V_x e N_x , são determinados pelas expressões:

$$(4) \begin{cases} M_x = M_{x,0} + M_{x,1} X_1 + M_{x,2} X_2 \\ N_x = N_{x,0} + N_{x,1} X_1 + N_{x,2} X_2 \\ V_x = V_{x,0} + V_{x,1} X_1 + V_{x,2} X_2 \end{cases}$$

em que:

$M_{x,0}, V_{x,0}, N_{x,0}$ - esforços correspondentes ao sistema isostático de base

$M_{x,1}, V_{x,1}, N_{x,1}$ - esforços que correspondem à aplicação de $X_1 = 1$ no sistema base, multiplicando pelo valor de X_1 depois de determinado.

$M_{x,2}, V_{x,2}, N_{x,2}$ - esforços que correspondem à aplicação de $X_2 = 1$ no sistema base, multiplicando pelo valor de X_2 depois de determinado.

A hipótese de escada articulada nos apoios deduz-se da análise anterior fazendo $X_1 = 0$, como adiante se refere.

5.2.2 - REACÇÕES DE APOIO E ESFORÇOS ISOSTÁTICOS (SISTEMA BASE DE REFERÊNCIA) RESULTANTES DA APLICAÇÃO DA ACÇÃO q' UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDA NO LANÇO.

a) Reacções de apoio (Fig. 5.5)

$$V_{1,0} = q' \ell; H_{2,0} d - \frac{q' \ell^2}{2} = 0, H_{1,0} = H_{2,0} = \frac{q' \ell^2}{2d}$$

e o momento de eixo vertical que equilibra o binário das reacções H' :

$$M'_{H,0} = H'_{2,0} r \text{ com uma componente de torção}$$

$$T'_{x,0} = H'_{2,0} r \sin\beta = \frac{q' \ell^2 r}{2d} \sin\beta = \frac{q' \ell r}{2} \cos\beta$$

e outra componente de flexão segundo o eixo z $M'_{y,0} = H'_{2,0} r \cos\beta$

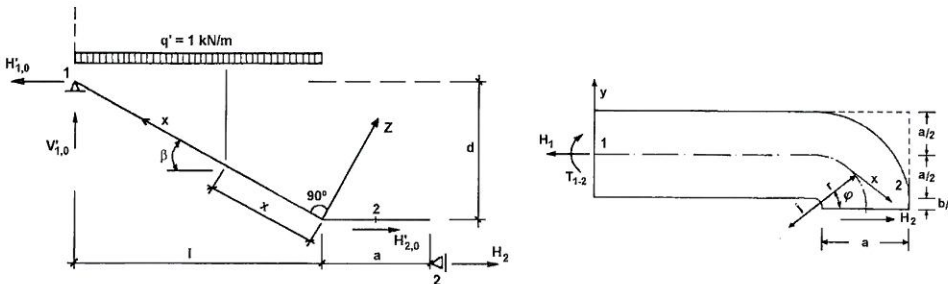


Fig. 5.5 - Aplicação de q' no lanço

b) Esforços actuantes no lançaço

$$V'_{x,0} = -H'_{2,0} \operatorname{sen}\beta + q' x \cos\beta = q' \left(x - \frac{\ell}{2} \right) \cos\beta; \quad V'_{y,0} = 0$$

$$N'_{x,0} = \pm H'_{2,0} \cos\beta \pm q' x \operatorname{sen}\beta = \pm \left(\frac{\ell^2}{2d} + \frac{dx}{\ell} \right) \cos\beta$$

(tracções no lançaço superior e compressões no lançaço inferior)

$$M'_{x,0} = H'_{2,0} x \operatorname{tg}\beta - \frac{1}{2} q' x^2 = \frac{q' x}{2} (\ell - x)$$

$$M'_{y,0} = \pm H'_{2,0} r \cos\beta = \pm \frac{q' \ell^2 r}{2d} \cos\beta$$

(o duplo sinal significa esforços de sentido oposto nas duas metades da estrutura)

c) Esforços actuantes no patim

$$V'_{x,0} = 0; \quad V'_{y,0} = -H'_{2,0} \cos\varphi = -\frac{q' \ell^2}{2d} \cos\varphi$$

$$N'_{x,0} = \pm H'_{2,0} \operatorname{sen}\varphi = \pm \frac{q' \ell^2}{2d} \operatorname{sen}\varphi; \quad M'_{x,0} = 0$$

$$M'_{y,0} = \pm H'_{2,0} \operatorname{sen}\varphi = \pm \frac{q' \ell^2}{2d} r \operatorname{sen}\varphi; \quad T'_{x,0} = 0$$

Os valores determinados neste paragrafo 5.2.2 bem como nos três paragrafos que se seguem (5.2.3 a 5.2.5) estão agupados nos quadros 5.1 e 5.2.

5.2.3 - REACÇÕES DE APOIO E ESFORÇOS ISOSTATICOS (SISTEMA-BASE DE REFERÊNCIA, 0) RESULTANTES DA APLICAÇÃO DA ACCÇÃO q'' UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA NO PATIM.

a) De acordo com a Fig. 5.6 as reacções de apoio são:

$$V''_{1,0} = q'' a; \quad H''_{2,0} = \frac{q'' a}{2d} (2\ell + a); \quad M''_{H,0} = \frac{q'' a}{2d} r (2\ell + a)$$

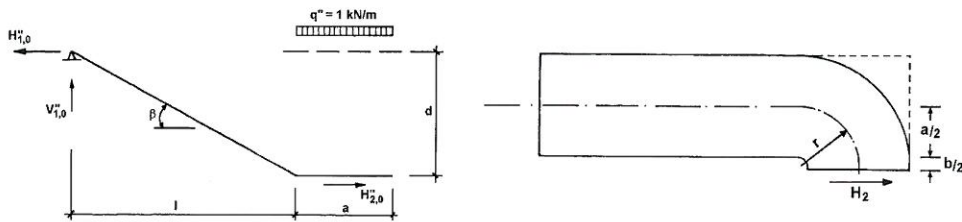


Fig. 5.6 - Aplicação de q'' no patamar

esta última com a componente de torção T'' e a M'' componente de flexão

$$T''_{x,0} = \frac{q''}{2d} a r (2l + a) \operatorname{sen} \beta \quad M''_{y,0} = H''_{2,0} r \operatorname{cos} \beta$$

b) Esforços actuantes no lanço ✕

$$V''_{x,0} = -H''_{2,0} \operatorname{sen} \beta + q'' a \operatorname{cos} \beta = q'' a \left(1 - \frac{2l - a}{2l} \right) \operatorname{cos} \beta = -q'' \frac{a^2}{2l} \operatorname{cos} \beta$$

$$V''_{y,0} = 0$$

$$N''_{x,0} = \pm (H''_{2,0} \operatorname{cos} \beta + q'' a \operatorname{sen} \beta) = \pm q'' a \left(\frac{2l + a}{2d} + \frac{d}{l} \right) \operatorname{cos} \beta$$

$$M''_{x,0} = H''_{2,0} x \operatorname{tg} \beta - q'' a \left(x + \frac{a}{2} \right) = \frac{q'' a}{2d} (2l + a) \frac{d}{l} x - q'' a \left(x + \frac{a}{2} \right) = \frac{q'' a^2}{2l} (x - l)$$

$$M''_{y,0} = \pm H''_{2,0} r \operatorname{cos} \beta = \pm \frac{q'' a}{2d} (2l + a) r \operatorname{cos} \beta$$

c) Esforços actuantes no patim

$$V''_{x,0} = 0$$

$$M''_{x,0} = H''_{2,0} \operatorname{cos} \varphi = - \frac{q'' a}{2d} (2l + a) \operatorname{cos} \varphi$$

$$N''_{x,0} = \pm H''_{2,0} \operatorname{sen} \varphi = \pm \frac{q'' a}{2d} (2l + a) \operatorname{sen} \varphi$$

$$M''_{x,0} = 0$$

$$M''_{y,0} = \pm H''_{2,0} r \operatorname{sen} \varphi = \pm \frac{q'' a}{2d} (2l + a) r \operatorname{sen} \varphi$$

$$T''_0 = 0$$

5.2.4 - REACÇÕES DE APOIO E ESFORÇOS ISOSTÁTICOS (SISTEMA-BASE DE REFERENCIA 0) RESULTANTE DA APLICAÇÃO DO MOMENTO FLECTOR $X_1 = 1$ NO APOIO 1.

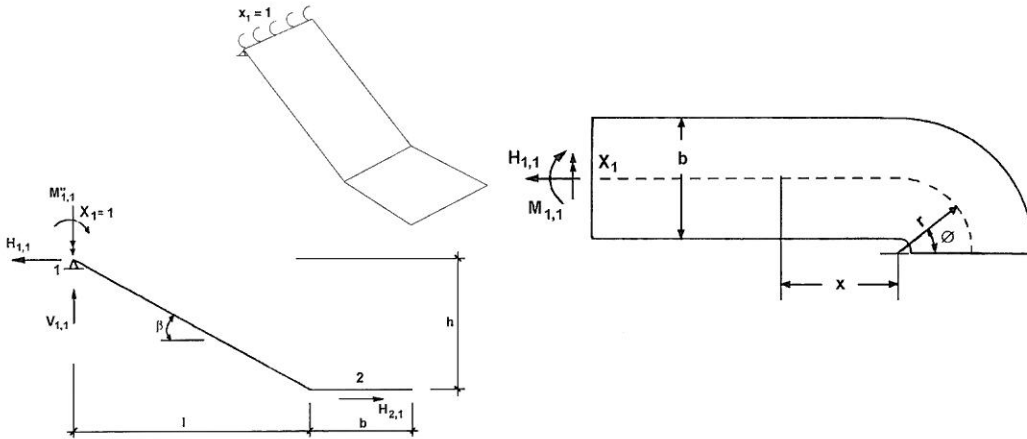


Fig. 5.7 - Aplicação do momento $X_1 = 1$ no apoio 1.

a) De acordo com a Fig. 5.7 as reacções de apoio são:

$$V_{1,1} = 0; H_{1,1} = H_{2,1} = \frac{1}{d}; M_{1,1} = \frac{r}{d}$$

esta última com uma componente de torção e outra componente de flexão

$$T_{x,1} = \frac{r}{d} \operatorname{sen} \beta; M_{y,1} = \frac{r}{d} \cos \beta$$

b) Esforços actuantes no lança

$$V_{x,1} = -H_{2,1} \operatorname{sen} \beta = -\frac{\operatorname{sen} \beta}{d}; V_{y,1} = 0; N_{x,1} = \pm H_{2,1} \cos \beta = \pm \frac{\cos \beta}{d}$$

$$M_{x,1} = H_{2,1} \operatorname{sen} \beta \frac{x}{\cos \beta} = \frac{x}{\ell}; M_{y,1} = \pm H_{2,1} r \cos \beta = \pm \frac{r}{d} \cos \beta$$

$$T_{x,1} = \pm H_{2,1} r \operatorname{sen} \beta = \pm \frac{r}{d} \operatorname{sen} \beta$$

c) Esforços actuantes no patim

$$V_{x,1} = 0 ; V_{y,1} = -H_{2,1} \cos\varphi = -\frac{\cos\varphi}{d}$$

$$M_{x,1} = 0 ; M_{y,1} = \pm H_{2,1} r \operatorname{sen}\varphi = \pm \frac{r}{d} \operatorname{sen}\varphi$$

$$N_{x,1} = \pm H_{2,1} \operatorname{sen}\varphi = \pm \frac{\operatorname{sen}\varphi}{d} ; T_{x,1} = 0$$

5.2.5 - REACÇÕES DE APOIO E ESFORÇOS ISOSTÁTICOS (SISTEMA DE REFERENCIA 0) RESULTANTES DA APLICAÇÃO DO MOMENTO FLECTOR $X_2 = 1$ NO APOIO 2.

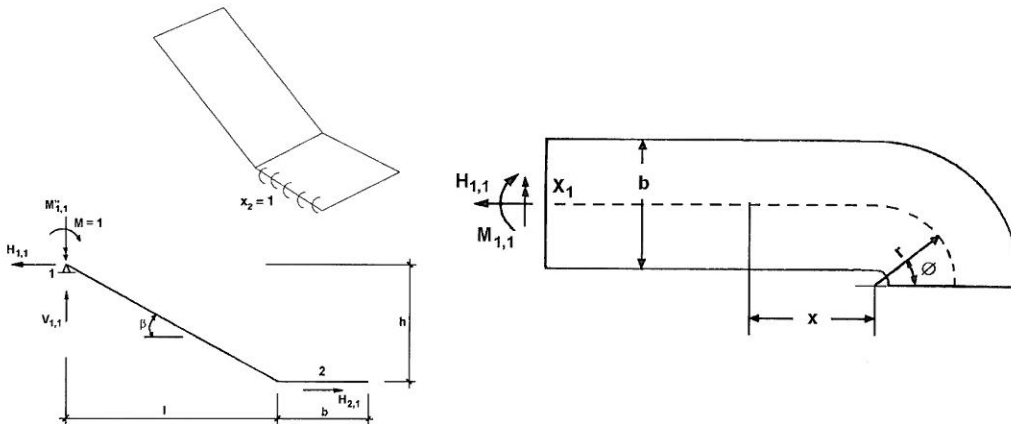


Fig. 5.8 - Aplicação do momento $X_2 = 1$ no apoio 2.

a) De acordo com a Fig. 5.8 as reacções de apoio são:

$$V_{1,2} = 0 ; H_{1,2} = H_{2,2} = 0 ; M_{2,2} = 1$$

b) Esforços actuantes no lançaço

$$V_{x,2} = 0 \quad M_{x,2} = 0 \quad M_{y,2} = \mp \operatorname{sen}\beta$$

$$V_{y,2} = 0 \quad N_{x,2} = 0 \quad T_{x,2} = \pm \cos\beta$$

c) Esforços actuantes no patim

$$\begin{aligned} V_{x,2} &= 0 & M_{x,2} &= \cos\varphi & M_{y,2} &= 0 \\ V_{y,2} &= 0 & N_{x,2} &= 0 & T_{x,2} &= \pm \operatorname{sen}\varphi \end{aligned}$$

5.2.6 - DETERMINAÇÃO DOS DESLOCAMENTOS

Tendo em conta a expressão 1) e os valores obtidos a partir dos quadros 5.1 e 5.2 vem, sucessivamente,

$$\begin{aligned} \delta'_{10} &= \frac{1}{\cos \varphi} \int_0^\ell \left[M'_{x,0} M_{x,1} + \frac{1}{2} T'_{x,0} T_{x,1} \left(1 + \frac{I_x}{I_y} \right) \right] dx = \\ &= \frac{q'}{\cos \beta} \int_0^\ell \left[\frac{x^2}{2\ell} (\ell - x) + \frac{1}{4} r^2 \cos^2 \beta \left(1 + \frac{I_x}{I_y} \right) \right] dx = \\ &= \frac{q' \ell^3}{24 \cos \beta} + \frac{q' \ell r^2 \cos \beta}{4} \left(1 + \frac{I_x}{I_y} \right) \dots\dots\dots(5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta''_{10} &= \frac{1}{\cos \beta} \int_0^\ell \left[M''_{x,0} M_{x,1} + \frac{1}{2} T''_{x,0} T_{x,1} \left(1 + \frac{I_x}{I_y} \right) \right] dx = \\ &= \frac{q'' a}{2\ell \cos \beta} \int_0^\ell \left[\frac{a}{\ell} x(x - \ell) + \frac{r^2 (2\ell + a)}{2d^2} \operatorname{sen}^2 \beta \right] dx = \\ &= \frac{q'' a^2 \ell}{12 \cos \beta} + \frac{q'' a r^2}{4d} (2\ell + a) \operatorname{sen} \beta \left(1 + \frac{I_x}{I_y} \right) \dots\dots\dots(6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta'_{20} &= \frac{1}{2 \cos \beta} \int_0^\ell T'_{x,0} T_{x,2} \left(1 + \frac{I_x}{I_y} \right) dx = \\ &= \frac{q' r \ell^2}{4 \cos \beta} \cos^2 \beta \left(1 + \frac{I_x}{I_y} \right) = \frac{q' \ell^2 r}{4} \left(1 + \frac{I_x}{I_y} \right) \cos \beta \dots\dots\dots(7) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \delta''_{20} &= \frac{1}{2 \cos \beta} \int_0^\ell T''_{x,0} T_{x,2} \left(1 + \frac{I_x}{I_y} dx \right) = \frac{\ell}{2 \cos \beta} \frac{q'' ar}{2d} (2\ell + a) \left(1 + \frac{I_x}{I_y} dx \right) \text{sen} \beta \cos \beta = \\ &= \frac{q'' ar}{4} (2\ell + a) \left(1 + \frac{I_x}{I_y} \right) \cos \beta \dots\dots\dots(8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \frac{1}{\cos \beta} \int_0^\ell \left[M_{x,1}^2 + \frac{1}{2} T_{x,1}^2 \left(1 + \frac{I_x}{I_y} \right) \right] dx = \\ &= \frac{1}{\cos \beta} \int_0^\ell \left[\left(\frac{x}{\ell} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{r}{d} \text{sen} \beta \right)^2 \left(1 + \frac{I_x}{I_y} \right) \right] dx = \\ &= \frac{\ell}{3 \cos \beta} + \frac{r^2 \text{sen} \beta}{2d} \left(1 + \frac{I_x}{I_y} \right) \dots\dots\dots(9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{12} &= \frac{1}{2 \cos \beta} \int_0^\ell T_{x,1} T_{x,2} \left(1 + \frac{I_x}{I_y} \right) dx = \frac{1}{2 \cos \beta} \int_0^\ell \frac{r}{d} \text{sen} \beta \cos \beta + \left(1 + \frac{I_x}{I_y} \right) dx = \\ &= \frac{r\ell}{2d} \text{sen} \beta \left(1 + \frac{I_x}{I_y} \right) = \frac{r \cos \beta}{2} \left(1 + \frac{I_x}{I_y} \right) \dots\dots\dots(10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{22} &= \int_0^{\pi/2} \left[M_{x,2}^2 + \frac{1}{2} T_{x,2}^2 \left(1 + \frac{I_x}{I_y} \right) \right] r d\varphi + \frac{1}{2 \cos \beta} \int_0^\ell T_{x,2}^2 \left(1 + \frac{I_x}{I_y} \right) dx = \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos^2 \beta + \frac{1}{2} \text{sen}^2 \varphi \left(1 + \frac{I_x}{I_y} \right) r d\varphi + \frac{1}{2 \cos \beta} \int_0^\ell \cos^2 \beta \left(1 + \frac{I_x}{I_y} \right) dx = \\ &= r \left[\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{4} \text{sen} 2\varphi \right] \int_0^{\pi/2} + \frac{r}{2} \left[\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{4} \text{sen} 2\varphi \right]_0^{\pi/2} \left(1 + \frac{I_x}{I_y} \right) + \\ &+ \frac{1}{2 \cos \beta} \left[\ell \cos^2 \beta \left(1 + \frac{I_x}{I_y} \right) \right] = \frac{\pi r}{8} \left(3 + \frac{I_x}{I_y} \right) + \frac{\ell \cos \beta}{2} \left(1 + \frac{I_x}{I_y} \right) \dots\dots\dots(11) \end{aligned}$$



As fórmulas apresentadas são de aplicação geral podendo as respectivas grandezas ser determinadas com o recurso a um computador, quaisquer que sejam as dimensões dos elementos estruturais e a largura da bomba da escada.

No entanto, sendo $I_x < 0,01 I_y$, a largura, “b”, de bomba da escada é pequena em relação à largura, “a”, do lança da escada ($b \simeq 0$, $a = 2r$); fazendo $r = \gamma \ell$ podemos simplificar o formulário: as expressões que dão os deslocamentos tomam a forma indicada no quadro 5.3, assumindo X_1 e X_2 os valores apresentados no mesmo quadro, para a escada encastrada nos apoios.

Para a escada articulada nos apoios $X_1 = 0$ e $\delta_{10} = \delta_{11} = \delta_{12} = 0$ resultando as expressões finais incluídas no quadro 5.4.

Com base nas expressões indicadas naqueles dois quadros foram calculados os valores que constam das tabelas 5.1 a 5.6.

5.3 - EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

Exemplo 5.1 - Determinação dos esforços actuantes nas secções de uma escada, com dez degraus por lança, encastrada nos dois apoios ao nível dos pisos do edifício onde se integra.

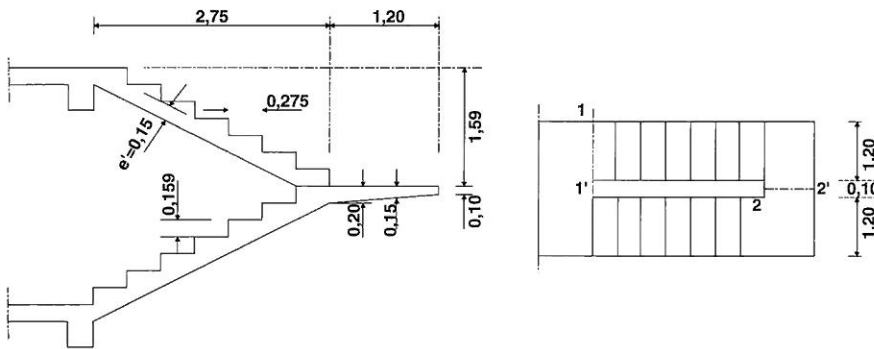


Fig. 5.9 - Exemplo 5.1

a) Características geométricas:

$\ell = 2,75$ m; $b = 0,10$ m; $a = 1,20$ m; $d = 1,588$ m (Fig. 5.2 e 5.9); espessuras das lajes dos degraus e média da laje do patim.

$$e' = 0,15 \text{ m}; e'' = \frac{0,20 + 0,10}{2} = 0,15; \text{ altura dos degraus} = \frac{1,588}{10} = 0,159 \text{ m}$$

LAJES E ESCADAS DE BETÃO ARMADO

$$\text{largura dos degraus} = \frac{2,75}{10} = 0,275 \text{ m}; \text{ inclinação da escada } \beta = 30^\circ$$

$$\text{sen } \beta = 0,5; \text{ cos } \beta = 0,866 \text{ 03}; \text{ tg } \beta = 0,577 \text{ 3}$$

Para determinar os valores máximos dos esforços nas diversas secções temos que fazer uma separação dos três tipos de acções, para posteriormente as poder combinar adequadamente:

- acções permanentes g' no lanço e g'' no patim, actuando simultaneamente;
- sobrecarga q' actuando no lanço ($q' = 5,0 \text{ kN / m}^2$)
- sobrecarga q'' actuante no patim ($q'' = 5,0 \text{ kN / m}^2$)

Os valores destas acções uniformemente distribuídas são as seguintes:

b) Acções actuantes no lanço

$$\text{devida ao peso da laje } \frac{0,15 \times 1,2 \times 25}{0,866} = 5,20 \text{ kN/m}$$

$$\text{devida ao peso dos degraus } \frac{0,159 \times 1,2 \times 25}{2} = 2,40$$

$$\text{devida aos acabamentos} = 1,00$$

$$\begin{array}{r} \text{sobrecarga} \\ g' = 5,0 \times 1,2 \end{array} = \begin{array}{r} 8,60 \text{ kN/m} \\ 6,00 \end{array}$$

$$g' + q' = 14,60 \text{ kN/m}$$

c) Acções actuantes no patim

$$\text{devida ao peso da laje} = 0,15 \times 1,20 \left(1 + \frac{0,10}{2 \times 1,20}\right) \times 25 = 4,70 \text{ kN/m}$$

$$\text{devida aos acabamentos} = 1,0 \times 1,20 \left(1 + \frac{0,10}{2 \times 1,20}\right) = 1,20$$

$$g'' = 5,90 \text{ kN/m}$$

$$\text{sobrecarga} = 5,0 \times 1,20 \left(1 + \frac{0,10}{2 \times 1,20}\right) \quad q'' = 6,25$$

$$g'' + q'' = 12,15 \text{ kN/m}$$



d) Valores de X_1 e X_2

Para a resolução numérica dos valores X_1 e X_2 começa-se por se determinar os valores dos coeficientes k_1 a k_4 por interpolação dos valores nas Tabelas 5.1 a 5.4. Assim, temos:

$$k_1 = 0,1325; \quad k_2 = 0,0501; \quad k_3 = -0,0361; \quad k_4 = 0,0783$$

Para a actuação da acção unitária de 1 kN/m

$$X'_1 = -0,1325 \times 2,75^2 = -1,002 \text{ kN.m}$$

$$X'_2 = -0,0501 \times 2,75^2 = -0,386 \text{ kN.m}$$

$$X''_1 = +0,0361 \times 2,75^2 = +0,273 \text{ kN.m}$$

$$X''_2 = -0,0783 \times 2,75^2 = -0,592 \text{ kN.m}$$

Para a actuação da acção permanente $g = g' + g''$, sendo $g' = 8,60 \text{ kN/m}$ e $g'' = 5,90 \text{ kN/m}$:

$$X_{1g} = -1,002 \times 8,6 + 0,273 \times 5,9 = -7,00 \text{ kN.m}$$

$$X_{2g} = -0,386 \times 8,6 - 0,592 \times 5,9 = -6,75 \text{ kN.m}$$

Para a actuação da sobrecarga q' no lanço ($q' = 6,00 \text{ kN/m}$)

$$X_{1q'} = -1,002 \times 6,0 = -6,01 \text{ kN.m}$$

$$X_{2q'} = -0,386 \times 6,0 = -2,32 \text{ kN.m}$$

Para a actuação da sobrecarga q'' no patim ($q'' = 6,25 \text{ kN/m}$)

$$X_{1q''} = +0,273 \times 6,25 = +6,25 = +1,71 \text{ kN.m}$$

$$X_{2q''} = -0,592 \times 6,25 = -3,70 \text{ kN.m}$$

Concluiu-se imediatamente que os valores máximos de X_1 e X_2 são, respectivamente:

$$X_1 = -(7,00 + 6,01) = -13,01 \text{ kN.m}$$

$$X_2 = -(6,75 + 2,32 - 3,70) = -12,77 \text{ kN.m}$$

em que X_1 é M_x no apoio 1 e X_2 é o momento flector na secção média do patim.

e) Momentos flectores

$$M_x = M_{x,0} + M_{x,1}X_1 + M_{x,2}X_2$$

De acordo com os quadros 5.1 e 5.2, as expressões que permitem determinar os momentos flectores no patim são:

$$M_x = X_2 \cos \varphi \begin{cases} \text{acções permanentes } (g'+g'') \\ \text{sobrecarga } q' \text{ no lanço } \\ \text{sobrecarga } q'' \text{ no patim} \end{cases}$$

Para $\varphi = 0$ temos $\cos \varphi = 1$, $M_x = X_2$

- acção permanente no lanço da escada

$$M_x = \left[g' \frac{x}{2} (\ell - x) - g'' \frac{a^2}{2\ell} (\ell - x) \right] - 7,00 \frac{x}{\ell} =$$

$= 8,60x (1,375 - 0,5x)$ $- 5,9 (0,720 - 0,262x)$ $- 2,545x$	$- 4,300 x^2 + 11,825 x$ $+ 1,546 x - 4,248$ $- 2,545 x$ <hr style="width: 100%;"/> $- 4,300 x^2 + 10,826 x - 4,248$
--	--

sobrecarga q' no lanço

$$M'_x = q' \frac{x}{2} (\ell - x) - 6,01 \frac{x}{\ell} =$$

$= - 6,00 (1,375x - 0,5x)$ $- 2,185x$	$- 3,000 x^2 + 8,250 x$ $- 2,185 x$ <hr style="width: 100%;"/> $- 7,300 x^2 + 16,891 x - 4,248$
---------------------------------------	---

sobrecarga q'' no patim

$$M''_x = - \frac{q'' a^2}{2\ell} (\ell - x) =$$

$= - 6,25 x 0,262 (2,75 - x) =$	$1,638 x - 4,503$
---------------------------------	-------------------

Para $x = 0$, secção de transição do lanço para o patim, resulta

$$M_x = - (4,248 + 4,503) = -8,8 \text{ kN.m}$$

Para a secção a meio vão ($x = \ell / 2 = 1,375\text{m}$)

$$M_x = -7,300 \times 1,375^2 + 16,891 \times 1,375 - 4,248 = +5,2 \text{ kN}$$

não se contabilizando a parcela devida a q'' ($1,638 \times 1,375 - 4,503 = -2,25 \text{ kN.m}$) pois, tendo valor negativo, reduziria o valor de M_x .

Para $x = 2,75 \text{ m}$ (secção do apoio)

$$M_x = 7,300 \times 2,75^2 + 16,891 \times 2,75 - 4,248 = -13,01 \text{ kN.m}$$

valor anteriormente determinado para $X_1 = M_{1-2}$

$$f) \text{ Momentos flectores } M_y = M_{y,0} + M_{y,1}X_1 + M_{y,2}X_2$$

- no patim estes momentos são nulos para $\varphi = 0$ secção em que actua X_2

- no lanço, há que determinar o valor dos factores constantes relativos aos contributos de cada uma das actuações da acção permanente e das sobrecargas (vidé quadros 5.1 e 5.2).

$$M'_{y,0} = q' \frac{\ell^2 r}{2d} \cos \beta = \frac{2,75^2 \times 0,6}{2 \times 1,588} \times 0,866 q'$$

$$M''_{y,0} = q'' \frac{ar}{2d} (2\ell + a) \cos \beta = \frac{1,20 \times 0,6}{2 \times 1,588} (2 \times 2,75 + 1,20) \times 0,866 q'' = 1,315 q''$$

$$M_{y,1} = \pm \frac{r}{d} \cos \beta X_1 = \pm \frac{0,6}{1,588} \times 0,866 X_1 = \pm 0,327 X_1$$

$$M_{y,2} = \pm \text{sen} \beta X_2 = \mp 0,500 X_2$$

LAJES E ESCADAS DE BETÃO ARMADO

Acção permanente	$(1,237 \times 8,6 + 1,315 \times 5,9)$	=	18 ,40 kN.m
	$- 0,327 \times 7,00$	=	-2 ,29 "
	$+ 0,500 \times 6,75$	=	3 ,38 "
			19 ,49 kN.m
Sobrecarga g'	$1,237 \times 6,00$	=	7 ,42 kN.m
	$-0,327 \times 6,01$	=	-1 ,97 "
	$+0,500 \times 2,32$	=	+1 ,16 "
			6 ,61 kN.m
Sobrecarga g''	$1,315 \times 6,25$	=	8 ,22 kN.m
	$+0,327 \times 1,71$	=	0 ,56 "
	$+0,500 \times 3,70$	=	1 ,85 "
			10 ,63 kN.m

O momento $M_y = \pm[19,49 + 6,61 + 10,63] = \pm 36,7$ kN.m , de valor constante actua ao longo do lanço em todas as secções.

g) Momentos de torção

- No patim são de valor nulo, para $\varphi = 0$, secção em que actua X_2
- No lanço, tomam-se os seguintes valores obtidos dos quadros 5.1 e 5.2

$$T'_{x,0} = q' \frac{\ell r}{2} \cos\beta = q' \frac{2,75 \times 0,60}{2} \times 0,866 = 0,715 q'$$

$$T''_{x,0} = q'' \frac{a r}{2d} (2\ell + a) \sin\beta = q'' \frac{1,20 \times 0,60}{2 \times 1,588} (2 \times 2,75 + 1,20) \times 0,500 = 0,759 q''$$

$$T_{x,1} = \frac{r}{d} \sin\beta X_1 = \frac{0,6}{1,588} \times 0,500 X_1 = 0,189 X_1 ; T_{x,2} = \cos\beta X_2 = 0,866 X_2 ;$$

Acção permanente	$0,715 \times 8,6 + 0,759 \times 5,9$	=	10 ,63 kN.m
	$-0,189 \times 7,00$	=	-1 ,32 "
	$-0,866 \times 6,75$	=	-5 ,85 "
			3 ,46 kN.m
Sobrecarga q'	$0,714 \times 6,00$	=	4 ,28 kN.m
	$-0,189 \times 6,01$	=	-1 ,14 "
	$-0,866 \times 2,32$	=	-1 ,48 "
			1 ,66 kN.m
Sobrecarga q''	$0,876 \times 6,25$	=	5 ,48 kN.m
	$+0,189 \times 1,71$	=	0 ,32 "
	$-0,866 \times 3,70$	=	-3 ,20 "
			2 ,60 kN.m

O momento de torção $T = \pm (3,46 + 1,66 + 2,60) = \pm 7,7$ kN.m actua ao longo do lanço em todas as secções.

h) Esforços normais

- No patamar tem valor nulo

- No lanço varia ao longo do eixo longitudinal, determinando-se os seus valores a partir do formulário dos quadros 5.1 e 5.2

$$N'_{x,0} = q' \left[\left(\frac{\ell^2}{2d} + \frac{d}{\ell} x \right) \right] \cos\beta = q' \left(\frac{2,75^2}{2 \times 1,588} + \frac{1,588}{2,75} x \right) \times 0,866 = (2,062 + 0,500x) q'$$

$$N''_{x,0} = +q'' a \left(\frac{2\ell + a}{2d} + \frac{d}{\ell} \right) \cos\beta = q'' \left[1,20 \times 0,08666 \left(\frac{2 \times 2,75 + 1,20}{2 \times 1,588} + \frac{1,488}{2,75} \right) \right] = 2,793 q''$$

$$N_{x,1} = \frac{\cos\beta}{d} X_1 = \frac{0,866}{1,588} X_1 = 0,545 X_1$$

LAJES E ESCADAS DE BETÃO ARMADO

Acção permanente	8,60 x (2,062 + 0,500x)	=	4,30 x + 17,733 kN
	2,793 x 5,0	=	16,479 "
	-0,545 x 7,00	=	-3,815 "
			4,30 x + 30,397 kN
Sobrecarga q'	0,5 x 0,6x	=	3,0 x kN
	2,062 x 6,00	=	12,372 "
	-0,545 x 6,01	=	-3,276 "
			3,0 x + 9,096 kN
Sobrecarga q''	2,793 x 6,00	=	17,456 kN
	0,545 x 1,71	=	0,932 "
			N _x = 7,30 x + 57,881 kN

Para: $x = 0$, $N_x = 57,9$ kN

$$x = \frac{\ell}{2}, \quad N_x = 7,30 \times 1,375 + 57,9 = 67,9 \text{ kN}$$

$$x = \ell, \quad N_x = 7,30 \times 2,75 + 57,9 = 78,0 \text{ kN}$$

Como verificação, a soma das componentes verticais dos valores dos esforços normais e dos esforços transversos nas secções $x = 0$ e $x = \ell$ deve equilibrar a carga total do lanço de $(8,6 + 6,0) \times 2,75 = 40,2$ kN. Com efeito,

$$(78,0 - 57,9) \operatorname{sen}\beta + (16,3 + 18,4) \operatorname{cos}\beta = 40,2 \text{ kN}$$

i) Esforços transversos T_i

De acordo com quadros 5.1 e 5.2, há que ter em conta as seguintes parcelas de esforço transverso:

$$V'_{x,0} = q' \left(x - \frac{\ell}{2} \right) \operatorname{cos}\beta = (0,866x - 1,191) g' ; \quad V''_{x,0} = -q'' \frac{a^2}{2\ell} \operatorname{cos}\beta = -0,226g' ;$$

$$V_{x,\ell} = -\frac{\operatorname{sen}\beta}{d} X_1 = -0,315 X_1$$

Acção permanente g

$$V_x = (0,866x - 1,191) \times 8,6 - 0,226 \times 5,11 + 0,315 \times 7,2 = (7,448x - 9,124) \text{ kN}$$

Sobrecarga q'

$$V'_x = (0,866x - 1,190) \times 6,0 + 0,315 \times 6,01 = (5,196x - 5,253) \text{ kN}$$

Sobrecarga q''

$$V''_x = -0,226 \times 6,25 - 0,315 \times 1,71 = -1,952 \text{ kN}$$

$$V_x + V'_x + V''_x = 12,644x - 16,329 \text{ kN}$$

Na secção de transição do patim para o lanço ($x = 0$) o esforço é 16,3 kN, na secção de apoio do lanço no pavimento do edifício ($x = 2,75$) esse esforço é 18,4 kN, tomando o valor nulo para $x = 1,29$ m, ou seja, aproximadamente a meio vão

$$\left(\ell / 2 = 2,75 / 2 = 1,38 \text{ m} \right).$$

Na Fig. 5.10 apresenta-se um esquema de disposição das armaduras na escada do exemplo 5.1.

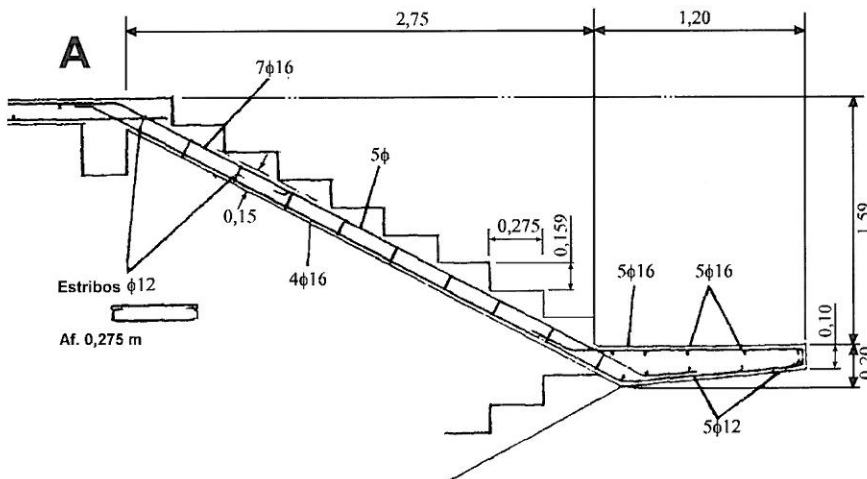


Fig. 5.10 - Esquema da disposição das armaduras

Exemplo 5.2 - Determinação dos esforços actuantes nas secções da escada apresentada no exemplo anterior, articulada nos dois apoios, ambos localizados ao nível dos pisos de um edifício.

Neste caso, começamos por determinar os valores dos coeficientes k_5 e k_6 , por interpolação dos valores das tabelas 5.5 e 5.6.

$$\beta = 30^\circ, \quad q = \frac{0,60}{2,75} = 0,218 \quad ; \quad k_5 = -0,0682, \quad k_6 = 0,07333, \quad \text{portanto:}$$

$$X'_2 = -0,0682 q' \ell^2, \quad X_2 = -0,0733 q'' \ell^2$$

Tendo em conta as expressões dos quadros 5.1 e 5.2 determinam-se os esforços finais M_{x0} , M_{x2} procedendo de modo idêntico ao referido no exemplo anterior.

As acções actuantes devem ser agrupadas do seguinte modo:

a) permanentes, actuando conjuntamente

$$g' = 8,60 \text{ kN / m no lanço} ; \quad g'' = 5,11 \text{ kN / m, no patim}$$

b) sobrecargas, actuando separadamente

$$q' = 6,00 \text{ kN/m no lanço} \quad ; \quad q'' = 6,25 \text{ kN/m no patim}$$

Como no exemplo anterior deve ter-se em conta que os correspondentes valores de X_2 são:

a) acções permanentes

$$X_{2g} = -(0,0682 \times 8,6 + 0,0733 \times 5,11) \times 2,75^2 = -7,27 \text{ kN.m}$$

b) sobrecargas

$$X_{2q'} = -0,0682 \times 6,00 \times 2,75^2 = -3,09 \text{ kN.m}$$

$$X_{2q''} = -0,0733 \times 6,25 \times 2,75^2 = -3,46 \text{ kN.m}$$

$$X_{1q''} = +0,273 \times 6,25 = +1,71 \text{ k.m}$$

$$X_{2q''} = -0,592 \times 6,25 = -3,70 \text{ kN.m}$$

Quadro 5.1- Esforços isostáticos devidos à actuação das acções q' no lanço e q'' no patim.

Esforços		no lanço	no patim
Actuação de q'	$M'_{x,0}$	$q' \frac{x}{2} (\ell - x)$	0
	$M'_{y,0}$	$\pm \frac{q' \ell^2 r}{2d} \cos \beta$	$\pm \frac{q' \ell^2}{2d} r \operatorname{sen} \varphi$
	$T'_{x,0}$	$q' \frac{\ell r}{2} \cos \beta$	0
	$N'_{x,0}$	$\pm q' \left(\frac{\ell^2}{2d} + \frac{dx}{\ell} \right) \cos \beta$	$\pm \frac{q' \ell^2}{2d} \operatorname{sen} \varphi$
	$V'_{x,0}$	$q' \left(x - \frac{\ell}{2} \right) \cos \beta$	0
	$V'_{y,0}$	0	$-\frac{q' \ell^2}{2d} \cos \varphi$
Actuação de q''	$M''_{x,0}$	$\frac{q'' a^2}{2\ell} (x - \ell)$	0
	$M''_{y,0}$	$\pm \frac{q'' ar}{2d} (2\ell + a) \cos \beta$	$\pm \frac{q'' a}{2d} (2\ell + a) \cos \varphi$
	$T''_{x,0}$	$\frac{q''}{2d} ar (2\ell + a) \operatorname{sen} \beta$	0
	$N''_{x,0}$	$\pm q'' a \left(\frac{2\ell + a}{2d} + \frac{d}{\ell} \right) \cos \beta$	$\pm \frac{q'' a}{2d} (2\ell + a) \operatorname{sen} \varphi$
	$V''_{x,0}$	$- q'' a \left(1 - \frac{2\ell + a}{2\ell} \right) \cos \beta$	0
	$V''_{y,0}$	0	$-\frac{q'' a}{2d} (2\ell + a) \cos \varphi$

Quadro 5.2 - Esforços isostáticos - Actuação dos momentos
 $X_1 = 1$ e $X_2 = 1$ nos apoios 1 e 2

Esforços		no lanço	no patim
Actuação de X_1	$M_{x,1}$	$\frac{x}{\ell}$	0
	$M_{y,1}$	$\pm \frac{r}{d} \cos\beta$	$\pm \frac{r}{d} \operatorname{sen}\varphi$
	$T_{x,1}$	$\pm \frac{r}{d} \operatorname{sen}\beta$	0
	$N_{x,1}$	$\pm \frac{\cos\beta}{d}$	$\pm \frac{\operatorname{sen}\varphi}{d}$
	$V_{x,1}$	$-\frac{\operatorname{sen}\beta}{d}$	0
	$V_{y,1}$	0	$-\frac{\cos\varphi}{d}$
Actuação de X_2	$M_{x,2}$	0	$\cos\varphi$
	$M_{y,2}$	$\mp \operatorname{sen}\beta$	0
	$T_{x,2}$	$\pm \cos\beta$	$\pm \operatorname{sen}\varphi$
	$N_{x,2}$	0	0
	$V_{x,2}$	0	0
	$V_{y,2}$	0	0

Quadro 5. 3- Escadas encastradas nos apoios - Valores de X_1 e X_2 (*)

Valores dos deslocamentos δ	
$\delta'_{10} = \left[\frac{1}{6\cos\beta} + \gamma^2 \cos\beta \right] \frac{q' \ell^3}{4}$	$\delta_{11} = \frac{\ell}{3\cos\beta} + \frac{\gamma^2 \ell^2 \cos\beta}{2}$
$\delta''_{10} = \left[\gamma^2 (a + 2\ell) \cos\beta - \frac{a}{3\cos\beta} \right] \frac{q'' a \ell}{4}$	$\delta_{12} = \frac{\gamma \ell \cos\beta}{2}$
$\delta'_{20} = \gamma \cos\beta \frac{q' \ell^3}{4}$	$\delta_{22} = \frac{\ell}{2} \left(\frac{3\pi\gamma}{4} + \cos\beta \right)$
$\delta''_{20} = (a + 2\ell) \gamma \cos\beta \frac{q'' a \ell}{4}$	—
Valores de X_1 e de X_2	
$X'_1 = -k_1 q' \ell^2$	$X'_2 = -k_3 q'' \ell^2$
$X''_1 = -k_2 q' \ell^2$	$X''_2 = -k_4 q'' \ell^2$
$k_1 = \frac{1}{4} \frac{3\pi\gamma + 4\cos\beta + 18\pi\gamma^3 \cos^2\beta}{6\pi\gamma + 8\cos\beta + 9\pi\gamma^3 \cos^2\beta}$	
$k_2 = \frac{3\gamma \cos\beta}{6\pi\gamma + 8\cos\beta + 9\pi\gamma^3 \cos^2\beta}$	
$k_3 = \frac{2\gamma^2 \left[9\pi\gamma^2 (1 + \gamma) \cos^2\beta - 3\pi\gamma - 4\cos\beta \right]}{6\pi\gamma + 8\cos\beta + 9\pi\gamma^3 \cos^2\beta}$	
$k_4 = \frac{8\gamma^2 (2 + 3\gamma) \cos\beta}{6\pi\gamma + 8\cos\beta + 9\pi\gamma^3 \cos^2\beta}$	

(*) - Formulário simplificado, tomando $a = 2r = 2\gamma \ell$; $1 + I_x / I_y = 1$ (Vidé tabelas 5.1 a 5.4 e exemplo 5.1).

Quadro 5.4 - Escadas articuladas nos apoios. Valor de X_2 (*)

$X'_2 = -k_5 q' \ell^2$	$X''_2 = -k_6 q'' \ell^2$
$k_5 = \frac{2\gamma \cos\beta}{3\pi\gamma + 4 \cos\beta}$	$k_6 = \frac{8\gamma^2(1 + \gamma) \cos\beta}{3\pi\gamma + 4 \cos\beta}$

(*) Formulário simplificado tomando $a = 2r = 2\gamma \ell$; $1 + I_x / I_y = 1$. (Vidé Tabelas 5.5 e 5.6 e exemplo 5.2).

Tabela 5.1 - Valores de k_1 (escada encastrada nos apoios)

$\gamma = \frac{r}{\ell}$	Valores de β - inclinação longitudinal da escada							
	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°
0,05	0,1251	0,1251	0,1251	0,1251	0,1251	0,1251	0,1251	0,1251
0,10	0,1260	0,1260	0,1260	0,1259	0,1258	0,1258	0,1257	0,1256
0,15	0,1281	0,1280	0,1279	0,1277	0,1275	0,1273	0,1271	0,1268
0,20	0,1318	0,1315	0,1312	0,1309	0,1304	0,1300	0,1294	0,1289
0,25	0,1370	0,1366	0,1360	0,1354	0,1346	0,1338	0,1328	0,1318
0,30	0,1440	0,1432	0,1424	0,1413	0,1401	0,1387	0,1372	0,1356
0,35	0,1524	0,1514	0,1502	0,1486	0,1468	0,1449	0,1427	0,1403
0,40	0,1623	0,1610	0,1592	0,1572	0,1547	0,1520	0,1491	0,1459
0,45	0,1734	0,1717	0,1695	0,1668	0,1637	0,1602	0,1563	0,1522
0,50	0,1855	0,1833	0,1806	0,1773	0,1735	0,1691	0,1643	0,1592
0,55	0,1982	0,1957	0,1925	0,1886	0,1840	0,1788	0,1730	0,1668
0,60	0,2114	0,2085	0,2048	0,2003	0,1950	0,1889	0,1822	0,1749
0,65	0,2248	0,2216	0,2174	0,2123	0,2064	0,1995	0,1918	0,1834
0,70	0,2382	0,2347	0,2301	0,2246	0,2179	0,2103	0,2017	0,1922



Tabela 5.2 - Valores de k_2 (escada encastrada nos apoios)

$\gamma = \frac{r}{\ell}$	Valores de β - inclinação longitudinal da escada							
	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°
0,05	0,0167	0,0167	0,0166	0,0165	0,0164	0,0162	0,0161	0,0158
0,10	0,0301	0,0299	0,0297	0,0294	0,0291	0,0286	0,0281	0,0274
0,15	0,0408	0,0405	0,0402	0,0397	0,0390	0,0383	0,0373	0,0361
0,20	0,0495	0,0491	0,0485	0,0478	0,0469	0,0458	0,0445	0,0428
0,25	0,0564	0,0558	0,0551	0,0543	0,0531	0,0518	0,0501	0,0480
0,30	0,0617	0,0611	0,0603	0,0592	0,0580	0,0564	0,0544	0,0521
0,35	0,0656	0,0650	0,0641	0,0630	0,0616	0,0599	0,0577	0,0551
0,40	0,0684	0,0677	0,0668	0,0657	0,0642	0,0624	0,0602	0,0574
0,45	0,0701	0,0694	0,0685	0,0674	0,0660	0,0641	0,0619	0,0591
0,50	0,0709	0,0703	0,0694	0,0684	0,0670	0,0652	0,0630	0,0602
0,55	0,0709	0,0704	0,0696	0,0686	0,0673	0,0656	0,0635	0,0608
0,60	0,0703	0,0698	0,0692	0,0683	0,0671	0,0656	0,0636	0,0610
0,65	0,0692	0,0688	0,0683	0,0675	0,0665	0,0651	0,0633	0,0608
0,70	0,0677	0,0674	0,0670	0,0664	0,0655	0,0643	0,0627	0,0604

Tabela 5.3- Valores de k_3 (escada encastrada nos apoios)

$\gamma = \frac{r}{\ell}$	Valores de β - inclinação longitudinal da escada							
	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°
0,05	-0,0025	-0,0025	-0,0025	-0,0025	-0,0025	-0,0025	-0,0025	-0,0025
0,10	-0,0094	-0,0094	-0,0094	-0,0094	-0,0095	-0,0095	-0,0096	-0,0096
0,15	-0,0194	-0,0195	-0,0197	-0,0198	-0,0200	-0,0202	-0,0204	-0,0207
0,20	-0,0306	-0,0310	-0,0314	-0,0319	-0,0325	-0,0331	-0,0338	-0,0346
0,25	-0,0405	-0,0412	-0,0423	-0,0435	-0,0449	-0,0464	-0,0482	-0,0500
0,30	-0,0460	-0,0476	-0,0497	-0,0521	-0,0550	-0,0581	-0,0616	-0,0653
0,35	-0,0444	-0,0472	-0,0509	-0,0553	-0,0603	-0,0660	-0,0722	-0,0788
0,40	-0,0325	-0,0372	-0,0431	-0,0502	-0,0585	-0,0677	-0,0779	-0,0887
0,45	-0,0078	-0,0148	-0,0238	-0,0345	-0,0470	-0,0611	-0,0766	-0,0932
0,50	0,0322	0,0222	0,0095	-0,0059	-0,0238	-0,0441	-0,0665	-0,0905
0,55	0,0894	0,0759	0,0586	0,0376	0,0131	-0,0147	-0,0455	-0,0789
0,60	0,1652	0,1477	0,1251	0,0977	0,0655	0,0287	-0,0122	-0,0568
0,65	0,2607	0,2387	0,2102	0,1755	0,1345	0,0875	0,0349	-0,0227
0,70	0,3765	0,3495	0,3147	0,2720	0,2213	0,1630	0,0972	0,0247

Tabela 5.4- Valores de k_4 (escada encastrada nos apoios)

$\gamma = \frac{r}{\ell}$	Valores de β - inclinação longitudinal da escada							
	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°
0,05	0,0048	0,0048	0,0048	0,0047	0,0047	0,0047	0,0046	0,0045
0,10	0,0184	0,0183	0,0182	0,0180	0,0178	0,0176	0,0172	0,0168
0,15	0,0400	0,0397	0,0394	0,0389	0,0382	0,0375	0,0365	0,0354
0,20	0,0686	0,0681	0,0673	0,0663	0,0651	0,0635	0,0617	0,0594
0,25	0,1033	0,1023	0,1011	0,0995	0,0974	0,0949	0,0918	0,0881
0,30	0,1431	0,1417	0,1398	0,1375	0,1345	0,1308	0,1263	0,1208
0,35	0,1868	0,1850	0,1825	0,1793	0,1753	0,1704	0,1643	0,1570
0,40	0,2333	0,2311	0,2281	0,2242	0,2192	0,2130	0,2054	0,1960
0,45	0,2816	0,2791	0,2756	0,2710	0,2652	0,2579	0,2487	0,2375
0,50	0,3306	0,3279	0,3240	0,3190	0,3125	0,3042	0,2938	0,2807
0,55	0,3795	0,3766	0,3727	0,3674	0,3604	0,3514	0,3399	0,3253
0,60	0,4274	0,4246	0,4207	0,4154	0,4082	0,3988	0,3865	0,3707
0,65	0,4737	0,4712	0,4675	0,4624	0,4554	0,4459	0,4332	0,4165
0,70	0,5180	0,5159	0,5127	0,5081	0,5014	0,4922	0,4795	0,4624

Tabela 5.5 Valores de k_5 (escada articulada nos apoios)

$\gamma = \frac{r}{\ell}$	Valores de β - inclinação longitudinal da escada							
	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°
0,05	0,0223	0,0222	0,0221	0,0220	0,0219	0,0217	0,0214	0,0211
0,10	0,0402	0,0400	0,0397	0,0393	0,0388	0,0382	0,0375	0,0366
0,15	0,0549	0,0545	0,0540	0,0533	0,0524	0,0513	0,0500	0,0484
0,20	0,0672	0,0666	0,0658	0,0648	0,0635	0,0619	0,0600	0,0577
0,25	0,0776	0,0768	0,0758	0,0744	0,0727	0,0707	0,0682	0,0652
0,30	0,0866	0,0856	0,0843	0,0826	0,0805	0,0780	0,0750	0,0714
0,35	0,0944	0,0932	0,0916	0,0896	0,0872	0,0843	0,0808	0,0767
0,40	0,1012	0,0999	0,0980	0,0958	0,0930	0,0897	0,0857	0,0811
0,45	0,1073	0,1057	0,1037	0,1012	0,0981	0,0944	0,0900	0,0849
0,50	0,1126	0,1109	0,1087	0,1060	0,1025	0,0985	0,0938	0,0883
0,55	0,1174	0,1156	0,1132	0,1102	0,1066	0,1022	0,0971	0,0912
0,60	0,1218	0,1198	0,1172	0,1140	0,1101	0,1054	0,1000	0,0938
0,65	0,1257	0,1236	0,1208	0,1174	0,1133	0,1084	0,1027	0,0961
0,70	0,1293	0,1270	0,1241	0,1205	0,1161	0,1110	0,1050	0,0982

Tabela 5.6 - Valores de k_g (escada articulada nos apoios)

$\gamma = \frac{r}{\ell}$	Valores de β - inclinação longitudinal da escada							
	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°
0,05	0,0047	0,0047	0,0046	0,0046	0,0046	0,0046	0,0045	0,0044
0,10	0,0177	0,0176	0,0175	0,0173	0,0171	0,0168	0,0165	0,0161
0,15	0,0379	0,0376	0,0372	0,0368	0,0362	0,0354	0,0345	0,0334
0,20	0,0645	0,0639	0,0632	0,0622	0,0609	0,0594	0,0576	0,0554
0,25	0,0971	0,0960	0,0947	0,0930	0,0909	0,0883	0,0852	0,0815
0,30	0,1351	0,1335	0,1315	0,1289	0,1256	0,1217	0,1170	0,1114
0,35	0,1784	0,1762	0,1732	0,1694	0,1648	0,1593	0,1527	0,1449
0,40	0,2268	0,2237	0,2196	0,2145	0,2083	0,2009	0,1920	0,1817
0,45	0,2800	0,2760	0,2706	0,2640	0,2560	0,2463	0,2349	0,2216
0,50	0,3379	0,3328	0,3261	0,3177	0,3076	0,2955	0,2813	0,2648
0,55	0,4005	0,3942	0,3859	0,3756	0,3632	0,3484	0,3310	0,3109
0,60	0,4676	0,4600	0,4500	0,4376	0,4226	0,4049	0,3841	0,3601
0,65	0,5392	0,5302	0,5183	0,5036	0,4859	0,4649	0,4404	0,4122
0,70	0,6153	0,6047	0,5908	0,5736	0,5529	0,5284	0,4999	0,4672

CAPÍTULO 6

• Escadas Ortoquebradas de Lanços Rectos

6.1 - GENERALIDADES

Este tipo de escadas é constituído por um trecho ortoquebrado, prolongado ou não com continuidade através de patamares longitudinais que se ligam à estrutura onde a escada se integra.

A inclinação do trecho ortoquebrado é definida pelo ângulo β (Fig. 6.1) o seu perímetro $s = \ell + h$ é constituído por elementos verticais (espelhos) e horizontais (cobertores) de secção rectangular, em regra de igual espessura.

A análise deste elemento estrutural é abordada pela teoria elástica das barras prismáticas, considerando a acção de cargas uniformemente distribuídas ou concentradas.

A dedução do formulário aplicável a este tipo de escadas é mais extenso do que o indicado neste texto, interessando fundamentalmente o que seguidamente se refere:

6.2 - ESCADA EM BALANÇO

6.2.1 - ACÇÃO DE CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDAS, g

Nos trechos horizontais, Fig. 6.1,

$$V_x = gx; \quad N_x = 0; \quad M_x = -\frac{gx^2}{2}; \quad M_{2-1} = -\frac{g\ell^2}{2}$$

Nos trechos verticais, Fig. 6.1,

$$V_x = 0; \quad N_x = gx; \quad M_x = -\frac{gx^2}{2}$$

tomando, a variável x , neste 2º caso, os valores $\frac{\ell}{n}, \frac{2\ell}{n}, \frac{3\ell}{n}, \dots, \frac{i\ell}{n}, \dots, \frac{(n-1)\ell}{n}$ uma vez que o número de trechos verticais é igual ao número n de trechos horizontais menos um. Portanto

V, N e M ao longo de cada um dos trechos verticais têm valores constantes, variando no entanto os seus valores de uns trechos para o outro, excepto V que é nulo.

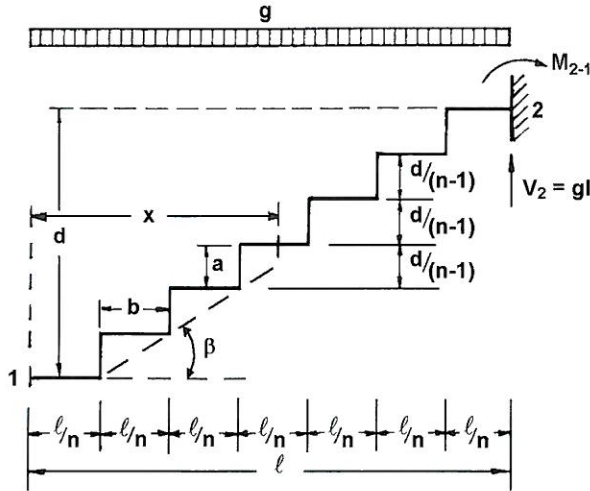


Fig.6.1 - Escada em consola de eixo quebrado com n degraus, sujeita à acção de uma carga uniformemente distribuída no vão.

A componente vertical de flecha na extremidade livre determina-se através da expressão:

$$f = \int_0^{(\ell+d)} \frac{MM'}{EI} ds$$

em que $M' = -x$ (ao longo de todo o comprimento da barra), momento correspondente à carga concentrada $F = 1$ colocada na extremidade livre da consola. O valor do limite superior $(\ell + d)$ do integral significa que este se estende ao desenvolvimento da escada, contando portanto com os trechos horizontais e com os trechos verticais.

Temos pois, no caso da barra de momento de inércia constante $I_d = I_\ell = I$

$$f = f_\ell + f_d = \frac{g}{2EI} \int_0^\ell x^3 dx + \frac{g\ell^3}{2EI} \frac{d}{n-1} \sum_{i=1}^{i=(n-1)} \left(\frac{i}{n}\right)^3$$

representando por f_ℓ a extensão do integral aos trechos horizontais $f_\ell = \frac{g\ell^4}{8EI}$ e por f_d a sua extensão aos trechos verticais. Em relação a estes últimos, devido ao valor constante em

cada trecho, o integral converte-se num somatório. Atendendo a que, na 2ª parcela,

$$x = \frac{i\ell}{n}, \text{ e que } \Delta s = \Delta y = \frac{d}{n-1} \text{ temos } f_d = \frac{g\ell^3}{2EI} \frac{d}{n-1} \sum_{i=1}^{i=n-1} \left(\frac{i}{n}\right)^3 \text{ em que:}$$

$$\sum_{i=1}^{i=(n-1)} \left(\frac{i}{n}\right)^3 = \frac{1}{n^3} \frac{n^2(n-1)^2}{4} \text{ (soma dos cubos dos (n-1) primeiros números), resultando:}$$

$f_d = \frac{g\ell^4}{2EI} \frac{(n-1)d}{4n\ell}$, valor este nulo para a laje de eixo rectilíneo ($d = 0$), igualmente carregada. Temos pois:

$$f = \frac{g\ell^4}{8EI} \left[1 + \frac{(n-1)d}{n\ell} \right]$$

No caso do momento de inércia dos trechos verticais ser I_ℓ diferente de I_d , relativo aos trechos verticais, resulta:

$$f = \frac{g\ell^4}{8E} \left[\frac{1}{I_\ell} + \frac{(n-1)d}{nI_d} \right]$$

6.2.2 - ACTUAÇÃO DE FORÇAS CONCENTRADAS F NOS VÉRTICES

Nos trechos horizontais, Fig. 6.2,

$$V_x = Fi, \quad N = 0$$

$$M_x = -F \left[i_x - \frac{\ell}{n} \sum_{i=1}^i (i-1) \right] = -F \left[i_x - \frac{i(i-1)\ell}{2n} \right]$$

uma vez que $M_{2-1} = -\frac{F\ell}{2}(n+1)$ é a soma dos $(i-1)$ primeiros números, sendo i o número de forças à esquerda da secção considerada.

$$M_{2-1} = -\frac{F\ell}{2}(n+1)$$

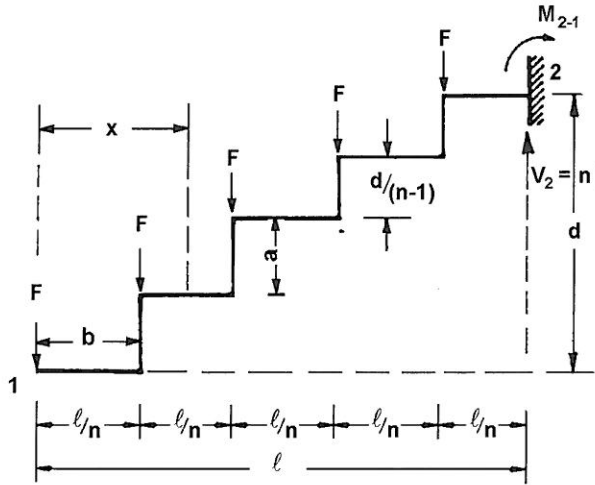


Fig.2 - Consola de eixo quebrado em n degraus, sujeitos à acção de cargas concentradas iguais em todos os vértices.

Nos trechos verticais,

$$V_x = 0; \quad N_x = Fi; \quad M_x = -F \left[ix - \frac{i(i-1)}{2n} \right]$$

em que x toma os valores indicados em 6.2.1.

A componente vertical da flecha no extremo livre é dada por

$$f = \int_0^{d+\ell} \frac{M}{EI} x \, ds = f_\ell + f_d, \quad \text{que se converte em } f_\ell \text{ para } d = 0 \text{ (} f_d = 0 \text{)}.$$

Em relação a f_ℓ que é a flecha no extremo livre da consola de eixo rectilíneo e vão ℓ , sujeita às mesmas cargas, o seu valor pode ser deduzido a partir da reacção da viga apoiada de um lado e encastrada do outro, dando ao apoio 1 (Fig. 6.2) deslocamento vertical f_ℓ :

$$F \left[1 + \frac{(n-1)(3n-1)}{8n} \right] = \frac{3EI}{\ell^3} f_\ell \quad ; \quad \text{donde se tira } f_\ell = \frac{3n^2 + 4n + 1}{24nEI} F \ell^3$$

Pelo que se refere à parcela f_d , fazendo $x = \frac{i\ell}{n}$ $\Delta y = \frac{d}{n-1}$:

$$f_d = \frac{F}{EI} \left\{ \frac{\ell^2}{n^2} \frac{d}{n-1} \sum_{i=1}^{i=(n-1)} i^3 - \frac{\ell^2}{2n^2} \frac{d}{n-1} \sum_{i=1}^{i=(n-1)} i^3 + \frac{\ell^2}{2n^2} \frac{d}{n-1} \sum_{n-1}^{i=(n-1)} i^2 \right\} =$$

$$= \frac{F}{EI} \frac{\ell^2}{2n^2} \frac{d}{(n-1)} \left\{ \frac{1}{4} (n-1)^2 n^2 + \frac{1}{6} (n-1)n(2n-1) \right\} = \frac{F\ell^2 d}{24nEI} (3n^2 + n - 2)$$

Temos portanto, no caso da viga de momento de inércia constante:

$$f = \frac{F\ell^3}{24EI} \left[(3n^2 + 4n + 1) + \frac{d}{\ell} (3n^2 + n - 2) \right]$$

No caso do momento de inércia dos trechos horizontais ser I_ℓ e dos trechos verticais ser I_d vem:

$$f = \frac{F\ell^3}{24EI} \left[\frac{3n^2 + 4n + 1}{I_\ell} + \frac{d}{\ell I_d} (3n^2 + n - 2) \right]$$

6.3 - ESCADA SIMPLEMENTE APOIADA

6.3.1 - ACCÇÃO DE UMA CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA, g

a) Esforços

$$V_1 = V_2 = \frac{g\ell}{2}$$

Nos trechos horizontais, Fig. 6.3

$$V_x = g \left(\frac{\ell}{2} - x \right); \quad N_x = 0; \quad M_x = \frac{g x (\ell - x)}{2}$$

Nos trechos verticais

$$V_x = 0; \quad N_x = g \left(\frac{\ell}{2} - x \right); \quad M_x = \frac{g x (\ell - x)}{2}$$

em que, neste último caso, $x = \frac{\ell}{n} i$.

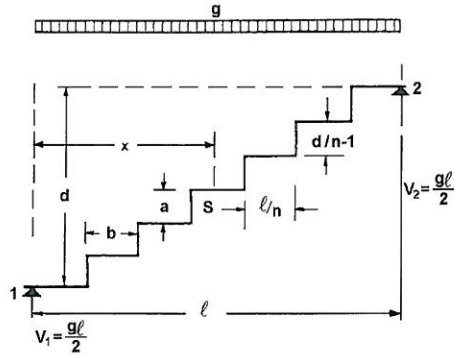


Fig.6.3 - Escada simplesmente apoiada de eixo quebrado com n degraus, sujeita a acção de uma carga uniformemente distribuída g

São portanto constantes os valores de V , N e M , ao longo de cada trecho vertical.

O valor do momento flector a meio ($x = \frac{\ell}{2}$) é $M = \frac{g\ell^2}{8}$, independentemente do número de degraus da escada.

Este valor é atingido, no caso de n ser ímpar, a meio do trecho horizontal médio e, no caso de n ser par, na extremidade direita do trecho horizontal de ordem $\frac{n}{2}$, mantendo-se constante ao longo do trecho vertical que se segue àquela extremidade, e na extremidade esquerda do trecho horizontal de ordem $\left(\frac{n}{2} + 1\right)$.

O que se referiu é aplicável quer seja constante o momento de inércia da escada ou tome valores diferentes nos trechos verticais e nos horizontais.

b) Flechas

A flecha a meio vão para uma carga concentrada $F' = 1$ na secção média da escada, a que correspondem os momentos $M' = \frac{x}{2}$ (no intervalo $0, \ell/2$) e $M' = \frac{\ell - x}{2}$ (no intervalo $\ell/2, \ell$) é dada por:

$$f = \int_0^{\ell+d} \frac{MM'}{EI} ds = f_{\ell} + f_d$$

LAJES E ESCADAS DE BETÃO ARMADO

Sendo I_ℓ o momento de inércia dos trechos horizontais e I_d o momento de inércia dos trechos verticais, f_ℓ é dado por:

$$f_\ell = \frac{2}{EI_\ell} \int_0^{\ell/2} \frac{g}{2} x^2 (\ell - x) dx = \frac{2g}{EI_\ell} \left[\frac{\ell x^3}{12} - \frac{x^4}{16} \right]_0^{\ell/2} = \frac{5g\ell^4}{384EI_\ell}$$

Para a parcela f_d tem, igualmente, que se considerar a divisão do intervalo total em duas partes, à esquerda e à direita do ponto médio da escada, em virtude da discontinuidade de M' . Dada a simetria da função, o valor de f_d é o dobro do correspondente a metade do intervalo d . Neste caso interessa considerar n par ou n ímpar.

b.1) Sendo n par, isto é, sendo ímpar o número de trechos verticais, o intervalo $\left(0, \frac{d}{2}\right)$ é limitado superiormente pelo meio do trecho vertical médio.

Quer isto dizer que i varia entre 0 e $\left(\frac{n}{2} - 1\right)$, devendo juntar-se o valor $\frac{MM'}{EI_d} \Delta s$ para o meio intervalo vertical do meio da escada. Como

$$\Delta s = \frac{\Delta y}{2} = \frac{d}{2(n-1)}$$

neste meio intervalo médio em que

$$i = \frac{n}{2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{\ell}{2},$$

temos que considerar a parcela

$$\frac{g\ell^2}{8EI_d} \frac{\ell}{2} \frac{d}{2(n-1)} = \frac{g\ell^3 d}{32(n-1)EI_d}.$$

Quanto às restantes parcelas, tomando $\Delta s = \Delta y = \frac{d}{n-1}$ dentro do somatório, resulta:

$$f_d = 2 \sum_{i=1}^{i=\left(\frac{n}{2}-1\right)} \frac{g}{2EI_d} \frac{i\ell}{n} \left(1 - \frac{i\ell}{n}\right) \frac{i\ell}{2} \Delta s + \frac{g\ell^3 d}{32(n-1)EI_d} = \frac{g\ell^4}{384EI_d} \frac{d(5n^2 + 4)}{n(n-1)}$$

Portanto, na hipótese do número de trechos horizontais ser par, a flecha do ponto médio da escada (coincidente com o meio do trecho vertical médio) é

$$f = f_{\ell} + f_d = \frac{5gl^4}{384EI_{\ell}} \left[1 + \frac{dI_{\ell}}{\ell I_d} \frac{5n^2 + 4}{5n(n-1)} \right] \quad (\text{n par})$$

No caso da escada de momento de inércia constante ($I_{\ell} = I_d$), sendo $\ell = bn$ e $d = a(n-1)$ em que b é a largura e a a altura de um degrau (Fig.6.4), vem:

$$f = \frac{5gl^4}{384EI_{\ell}} (1+k) \quad \text{em que } k = \frac{a}{b} \frac{5n^2 + 4}{5n^2}$$

$$k = 1,40 \frac{a}{b} \text{ para } n = 2 \text{ e } k = 1,00 \frac{a}{b} \text{ para } n = \infty$$

b.2) Sendo par o número de trechos verticais, e no total igual a $(n - 1)$, sendo n o número (ímpar) de trechos horizontais, f_{ℓ} mantém o valor anteriormente determinado e f_d vale agora

$$f_d = \frac{gl^3d}{EI_d} \frac{1}{2n^2(n-1)} \sum_{i=1}^{i=\frac{n-1}{2}} \frac{gl^4}{EI_d} \frac{d}{\ell n^3(n-1)} (5n^2 + 3)(n^2 - 1)$$

Conclui-se portanto que na hipótese do número de trechos horizontais ser ímpar a flecha a meio (coincidente com o meio de um elemento horizontal) é

$$f = f_{\ell} + f_d = \frac{5gl^4}{384EI_{\ell}} \left[1 + \frac{dI_{\ell}}{\ell I_d} \frac{(n^2 - 1)(5n^2 + 3)}{5n^3(n-1)} \right] \quad (\text{n ímpar})$$

No caso da escada de momento de inércia constante ($I_{\ell} = I_d = I$)

$$f = \frac{5gl^4}{384EI} (1+k), \text{ em que } k = \frac{a}{b} \frac{(n^2 - 1)(5n^2 + 3)}{5n^4}$$

$$k = 0,96 \frac{a}{b} \text{ para } n = 3 \text{ (escada com dois degraus); } k = 1,00 \frac{a}{b} \text{ para } n = \infty$$

Portanto o valor de k varia pouco com o número de degraus da escada.

6.3.2 - ACÇÃO DE CARGAS CONCENTRADAS F NOS VÉRTICES

a) Esforços

No caso de cargas concentradas (fig.6.4) vem:

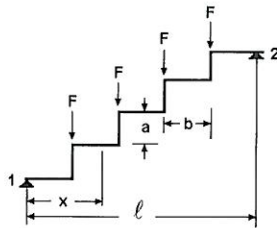


Fig. 6.4 - Escada simplesmente apoiada, de eixo quebrado com n degraus iguais sujeita à acção de cargas concentradas F em todos os vértices.

De acordo com os princípios atrás referidos temos o seguinte:

$$R_1 = R_2 = \frac{F}{2}(n - 1)$$

Nos elementos horizontais

$$M = \frac{F}{2}(n - 1)x - (i - 1)Fx + \frac{(i - 1)i}{2} \frac{Fi}{n} = \frac{Fx}{2}(n + 1 - 2i) + \frac{Fi}{2n}(i - 1)i$$

Se n é ímpar, o momento flector máximo localiza-se no trecho horizontal médio de ordem $i = \frac{n + 1}{2}$, para $x = \frac{\ell}{2}$, e toma o valor:

$$M_{\ell/2} = \frac{F\ell}{8n}(n^2 - 1) = kF\ell, \text{ sendo } k = \frac{n^2 + 2}{8n}$$

Nos trechos verticais $M = \frac{F\ell}{2n}[(n - 1)i - i(i - 1)] = \frac{F\ell}{2n}(ni - i^2)$

Se n é par, o momento flector máximo verifica-se ao longo do trecho vertical médio, de ordem $i = \frac{n}{2}$, e toma o valor:

$$M_{\ell/2} = \frac{F\ell n}{8} = kF\ell, \text{ sendo } k = \frac{n}{8}$$

No quadro seguinte apresentam-se os valores de k para a determinação do momento flector a meio da escada simplesmente apoiada, carregada com (n - 1) cargas F.

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
k	1/4	1/3	1/2	3/5	3/4	6/7	1	10/9	5/4	15/11	3/2	21/11	7/4	28/11

b) Flechas

A flecha a meio vão, para a hipótese da escada simplesmente apoiada e para as cargas consideradas, é dada por

$$f = \int_0^{(\ell+d)} \frac{MM'}{EI} ds = f_\ell + f_d$$

em que, no intervalo $\left(0, \frac{\ell}{2}\right)$, $M' = \frac{x}{2}$.

Dada a simetria da função, o valor deste integral é igual ao dobro do integral estendido a metade do intervalo.

O valor de f_ℓ , isto é, a flecha a meio vão da escada de eixo rectilíneo e de vão ℓ , simplesmente apoiada e sujeita ao mesmo sistema de cargas toma os valores:

$$f_\ell = \frac{F\ell^3}{EI_\ell} \frac{5n^2 - 4}{384n}, \text{ (n par) e } f_\ell = \frac{F\ell^3}{EI_\ell} \frac{(5n^2 + 1)(n^2 - 1)}{384n^3}, \text{ (n ímpar)}$$

b.1) Parcela f_d para n par

Quanto à parcela f_d , sendo n par, o número (n - 1) de trechos verticais é ímpar, de modo a que a divisão do intervalo (0, d) ao meio obriga a considerar o meio intervalo

médio, em que $x = \frac{\ell}{2}$ ou $i = \frac{n}{2}$, e portanto:

$$\frac{MM'}{EI_d} = \frac{F\ell^2}{4n^2EI_d} (ni^2 - i^3) \frac{d}{2(n-1)} = \frac{F\ell^2 d n}{64(n-1)EI_d}.$$

Para o cálculo da flecha temos que considerar no intervalo $\left(0, \frac{n}{2} - 1\right)$ a função

$$\frac{MM'}{EI_d} = \frac{F\ell^2}{4n^2EI_d} (ni^2 - i^3)$$

e multiplicar por 2 o resultado, depois de somar a parcela acima calculada. Temos portanto,

$$f_d = \frac{2F\ell^2d}{4n^2(n-1)EI_d} \left[\sum_{i=1}^{i=\left(\frac{n}{2}-1\right)} (ni^2 - i^3) + \frac{n^3}{16} \right] = \frac{F\ell^3d}{384\ell(n-1)EI_d} (5n^2 + 4).$$

Assim,

$$f = \frac{F\ell^3(5n^2 - 4)}{384nEI_\ell} \left[1 + \frac{dI_\ell}{\ell I_d} \frac{n}{n-1} \frac{5n^2 + 4}{5n^2 - 4} \right] \quad (n \text{ par})$$

ou, fazendo intervir as dimensões **a** e **b** dos degraus,

$$f = \frac{F\ell^3(5n^2 - 4)}{384nEI_\ell} (1 + k) \quad \text{em que} \quad k = \frac{aI_\ell}{bI_d} \frac{5n^2 + 4}{5n^2 - 4}$$

Para $I_\ell = I_d$ resulta:

$$k = 1,5 \frac{a}{b} \quad \text{para } n = 2 \text{ (escada de um só degrau); } k = 1,0 \frac{a}{b} \quad \text{para } n = \infty$$

b.2) Parcela f_d para n ímpar

Sendo n ímpar, temos para f_d .

$$\begin{aligned} f_d &= \frac{2F\ell^2}{4n^2EI_d} \sum_{i=1}^{i=\frac{n-1}{2}} (ni^2 - i^3) \Delta s = \\ &= \frac{F\ell^2d}{4n^2(n-1)EI_d} \left\{ n \left(\frac{n-1}{2} \right) \left(\frac{n+1}{2} \right) n - \frac{1}{4} \left(\frac{n-1}{2} \right)^2 \left(\frac{n+1}{2} \right)^2 \right\} = \\ &= \frac{F\ell^2d}{384n^2EI_d} 2(n+1)(5n^2 + 3) \end{aligned}$$

Assim,

$$f = \frac{F\ell^3(n^2 - 1)(5n^2 + 1)}{384n^3EI_\ell} \left[1 + \frac{dI_\ell}{\ell I_d} \frac{2n(5n^2 + 3)}{(n - 1)(5n^2 + 1)} \right] \quad (n \text{ ímpar})$$

ou ainda, entrando com as dimensões **a** e **b** de cada degrau,

$$f = \frac{F\ell^3(n^2 - 1)(5n^2 + 1)}{384n^3EI_\ell} (1 + k)$$

em que $k = \frac{aI_\ell}{bI_d} \frac{2(5n^2 + 3)}{5n^2 + 1}$;

Para $I_\ell = I_d$, $k = 2,09 \frac{a}{b}$ para $n = 3$ (escada de dois degraus); $k = 2,00 \frac{a}{b}$ para $n = \infty$

6.3.3 - APLICAÇÃO DO MOMENTO $M_{1,2}$ NO APOIO 1 (FIG. 6.5)

Esta hipótese permite fazer o cálculo da flecha em escadas com encastramento num ou nos dois apoios, a partir da escada simplesmente apoiada.

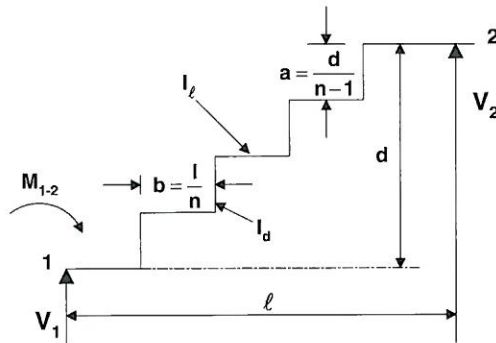


Fig. 6.5 - Escada simplesmente apoiada, de eixo quebrado com n degraus, sujeita a acção de um momento num dos apoios.

A aplicação do momento $M_{1,2}$ no apoio esquerdo produz nos trechos horizontais da viga o momento

$$M_x = -V_1 x + M_{1-2} \quad \text{em que} \quad V_1 = \frac{M_{1-2}}{\ell}; \quad M_x = \frac{1-x}{\ell} M_{1-2}$$

Relativamente à deformação, $f = f_\ell + f_d$, onde $F_\ell = \frac{M_{1-2}}{16EI_\ell} \ell^2$

Na determinação da componente f_d temos que considerar duas hipóteses, como no caso anterior:

a) Sendo n par e portanto ímpar o número de trechos verticais i , o intervalo $\frac{d}{2}$ é limitado pelas duas metades do trecho vertical médio. Temos assim i a variar entre 1 e $\left(\frac{n}{2} - 1\right)$ e entre $\left(\frac{n}{2} + 1\right)$ e $(n - 1)$, tendo ainda que somar, em cada caso, o valor $\frac{MM'}{EI_d} ds$ para meio intervalo, onde $i = \frac{n}{2}$.

Notar que $\sum_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}^{(n-1)} = \sum_1^{n-1} = \sum_1^{\frac{n}{2}}$ e que na metade esquerda e na sua metade direita da

escada é respectivamente $MM' = \frac{\ell M_{1-2}}{2n} \left(i - \frac{i^2}{2}\right)$ $MM' = \frac{\ell M_{1-2}}{2} \left(1 - \frac{i}{n}\right)^2$

Temos:

$$f_h = \frac{M_{1-2} \ell h}{2(n-1)EI_d} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=\left(\frac{n}{2}-1\right)} \left(i - \frac{i^2}{n}\right) + \frac{1}{8} + \sum_{i=1}^{i=(n-1)} \left(1 + \frac{i^2}{n^2} - \frac{2i}{n}\right) - \sum_{i=1}^{i=\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{i^2}{n^2} - \frac{2i}{n}\right) + \frac{1}{8} \right\} =$$

$$= \frac{d \ell^2 M_{1-2}}{16 \ell EI_d}$$

e portanto $f = \frac{M_{1-2} \ell^2}{16EI_\ell} (1+k)$ em que $k = \frac{dI_\ell}{\ell I_d} = \frac{aI_\ell}{bI_d} \frac{n-1}{n}$ (n par)



Para a escada de momento de inércia constante ($I_\ell = I_d$), $k = 0,5 \frac{a}{b}$ para $n = 2$;

$k = 1,0 \frac{a}{b}$ para $n = \infty$.

b) Sendo n ímpar temos para valor de f_d a meio vão:

$$f_d = \frac{M_{1-2} \ell d}{2(n-1)EI_d} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=\frac{(n-1)}{2}} \left(i - \frac{i^2}{n} \right) + \frac{1}{8} + \sum_{i=\frac{(n+1)}{2}}^{i=\frac{(n-1)}{2}} \left(1 + \frac{i^2}{n^2} + \frac{1}{8} \right) \right] =$$

$$= \frac{M_{1-2} \ell d}{48n(n-1)EI_d} (3n^2 + 3) = \frac{M_{1-2} \ell^2 d (n^2 + 1)}{16n \ell^2 (n-1)EI_d}$$

Assim,

$$f = \frac{M_{1-2} \ell^2}{16EI_\ell} (1+k) \text{ em que } k = \frac{aI_\ell (n^2 + 1)}{bI_d n^2} \quad (n \text{ ímpar})$$

Na hipótese de ser $I_\ell = I_d$, $k = 1,11 \frac{a}{b}$ para $n = 3$, $k = 1,00 \frac{a}{b}$ para $n = \infty$.

6.3.4 - APLICAÇÃO DOS MOMENTOS M_{1-2} E M_{2-1} NOS APOIOS 1 E 2 (FIG. 6.6)

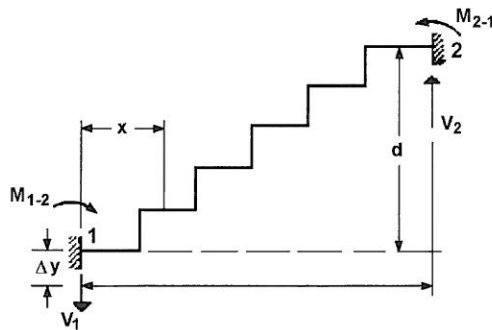


Fig.6.6 - Escada simplesmente apoiada, de eixo quebrado com n degraus, sujeita à acção de momentos nos dois eixos

A flecha a meio vão é dada, à semelhança do caso anterior (§ 6.3.3), por

$$f = \frac{(M_{1-2} + M_{2-1})\ell^2}{16EI_\ell}(1+k)$$

em que k assume os valores indicados no parágrafo 6.3.3.

6.4 - ESCADA SIMPLEMENTE APOIADA DE UM LADO E PERFEITAMENTE ENCASTRADA NO OUTRO

6.4.1 - ACÇÃO DE UMA CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDA POR g

Tomando para incógnita hiperestática V_1 (Fig. 6.7), temos nos trechos horizontais

$$M = V_1x - \frac{gx^2}{2}; \quad \frac{\partial M}{\partial V_1} = x$$

e nos trechos verticais $M = V_1 \frac{i\ell}{n} - \frac{g}{2} \frac{i^2\ell^2}{n^2}$.

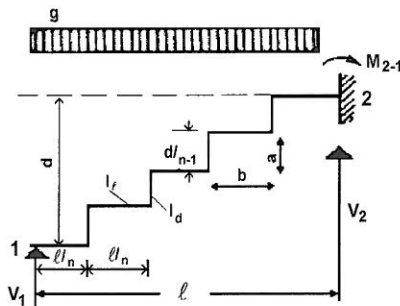


Fig.6.7 - Escada simplesmente apoiada de um lado e perfeitamente encastrada do outro, de eixo quebrado com n degraus, sujeitos à acção de uma carga uniformemente distribuída.

Vem portanto

$$\int_0^{(\ell+d)} \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial V_1} ds = 0, \text{ donde:}$$

$$\frac{V_1}{I_\ell} \int_0^\ell x^2 dx - \frac{g}{2I_\ell} \int_0^\ell x^3 dx + \frac{V_1 \ell^2 d}{n^2(n-1)I_d} \sum_{i=1}^{i=(n-1)} i^2 - \frac{g\ell^3 d}{2n^3(n-1)I_d} \times \sum_{i=1}^{i=(n-1)} i^3 = 0,$$



de que resulta $V_1 = \frac{3g\ell}{8}k$ em que k assume o valor $k = 1$ para $d = 0$ (laje de eixo rectilíneo)

$$k = \frac{1 + \frac{(n-1)d}{n^2\ell} \frac{I_\ell}{I_d}}{1 + \frac{(2n-1)d}{2n\ell} \frac{I_\ell}{I_d}} = \frac{1 + \frac{(n-1)^2}{n^3} \frac{aI_\ell}{bI_d}}{1 + \frac{(2n-1)(n-1)}{2n^2} \frac{aI_\ell}{bI_d}}$$

No caso da escada de momento de inércia constante ($I_d = I_\ell$), para:

$$n = 2, k = \frac{8b+a}{8b+3a} = \begin{cases} 0,91 & \text{para } a = 0,4b \\ 0,82 & \text{para } a = b \end{cases}; \quad n = \infty \dots\dots\dots k = 1,00$$

portanto o valor de k não é muito variável com o número de degraus.

Resulta para expressão de M_{2-1}

$$M_{2-1} = V_1\ell - \frac{g\ell^2}{2} = -\frac{g\ell^2}{8}(4 - 3k).$$

6.4.2 - ACÇÃO DE CARGAS CONCENTRADAS F NOS VÉRTICES DOS DEGRAUS (FIG. 6.8)

Temos nos elementos horizontais, de modo semelhante a 6.4.1.

$$M = V_1x - (i-1)Fx + \frac{i(i-1)}{2} \frac{F\ell}{n}$$

e nos elementos verticais

$$M = V_1 \frac{\ell}{n} i - (i-1) \frac{Fi\ell}{n} + \frac{i(i-1)}{2} \frac{F\ell}{n} = V_1 \frac{i\ell}{n} - \frac{F\ell}{2n} (i^2 - i)$$

A equação resolvente é, como no caso anterior,

$$\int_0^{(\ell+d)} \frac{M_x}{EI} ds = 0, \text{ donde}$$



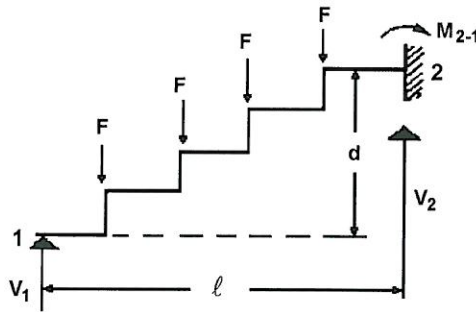


Fig.6.8 - Escala simplesmente apoiada de um lado e perfeitamente encastrada do outro, de eixo quebrado com n degraus sujeitos a cargas concentradas F nos vértices.

$$\frac{1}{I_\ell} \left\{ V_1 \int_0^\ell x^2 dx - F \sum_{i=1}^{n-1} (i-1) \int_{\frac{i-1}{n}\ell}^{\frac{i}{n}\ell} x^2 dx + \frac{F\ell}{2n} \sum_{i=1}^{n-1} (i^2-1) \int_{\frac{i-1}{n}\ell}^{\frac{i}{n}\ell} x ds \right\} +$$

$$+ \frac{h}{n(n-1)I_d} \left\{ \frac{V_1 \ell^2}{n^2} \sum_{i=1}^{n-1} i^2 - \frac{F\ell^2}{2n^2} \times \sum_{i=1}^{n-1} (i^3 - i^2) \right\} = 0$$

O 1º colchete tem por valor $\frac{\ell^3}{3I_\ell} \left[V_1 - \frac{(n-1)(3n-1)}{8n} F \right]$

O 2º colchete tem por valor $\frac{\ell^3 d}{24n^2 I_d} \left[4V_1(2n-1) - F(3n^2 - 7n + 2) \right]$

resultando para a escada $V_1 = \frac{(n-1)(3n-1)}{8n} Fk$ em que

$$k = \frac{1 + \frac{3n^2 - 7n + 2}{n(n-1)(3n-1)} \frac{dI_\ell}{\ell I_d}}{1 + \frac{(2n-1)}{2n^2} \frac{dI_\ell}{\ell I_d}} = \frac{1 + \frac{3n^2 - 7n + 2}{n^2(3n-1)} \frac{aI_\ell}{bI_d}}{1 + \frac{(2n-1)(n-1)}{2n^3} \frac{aI_\ell}{bI_d}}$$



Para $d = 0$ (laje de eixo rectilíneo igualmente carregada), $k = 1$

No caso de ser $I_\ell = I_d$, vem para:

$$n = 2 \quad k = \frac{1}{1 + \frac{3a}{16b}} \begin{cases} = 0,93 \text{ para } a = 0,4b \\ = 0,84 \text{ para } a = b \end{cases}$$

$$n = \infty \quad k = 1,00$$

6.5 - ESCADA PERFEITAMENTE ENCASTRADA NOS DOIS APOIOS

6.5.1 - ACÇÃO DE UMA CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDA g (FIG. 6.9)

Dada a simetria, $V_1 = V_2 = \frac{g\ell}{2}$ e portanto nos trechos horizontais

$$M = M_{1-2} + \frac{g\ell x}{2} - \frac{gx^2}{2}; \quad \frac{\partial M}{\partial M_{1-2}} = 1$$

Nos elementos verticais, a expressão de M é a mesma, podendo x tomar sucessivamente os valores

$$x = \frac{\ell}{n}, \frac{2\ell}{n}, \dots, \frac{i\ell}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}\ell \text{ à semelhança de casos anteriores.}$$

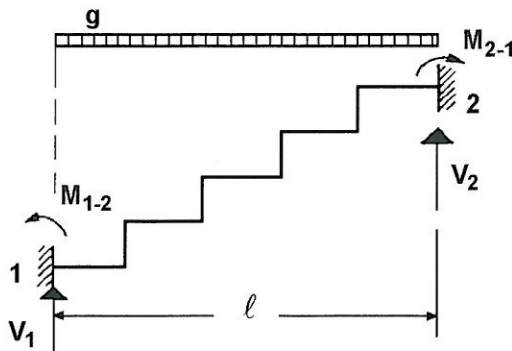


Fig.6.9 - Escada perfeitamente encastrada, de eixo quebrado com n degraus, sujeita a uma carga uniformemente distribuída.

Temos pois, a equação resolvente

$$\int_0^{(\ell+h)} \frac{M}{EI} ds = 0, \text{ ou seja}$$

$$\left\{ \frac{M_{1-2}}{I_\ell} \int_0^\ell dx + \frac{g\ell}{2I_1} \int_0^\ell x dx - \frac{g}{2I_\ell} \int_0^\ell x^2 dx \right\} + \\ + \frac{d}{I_d} \left\{ M_{1-2} + \frac{g\ell^2}{2n(n-1)} \sum_{i=1}^{i=(n-1)} i - \frac{g\ell^2}{2n^2(n-1)} \sum_{i=1}^{i=(n-1)} i^2 \right\} = 0$$

O valor do 1º colchete é $\frac{1}{I_\ell} \left[\ell M_{1-2} + \frac{g\ell^3}{12} \right]$ parcela que corresponde à escada

recta de vão ℓ sujeita à carga uniformemente distribuída g .

O valor do 2º colchete é

$$\frac{d}{I_d} \left\{ M_{1-2} + \frac{g\ell^2}{2n} \left[\frac{n(n-1)}{2(n-1)} - \frac{n(n-1)(2n-1)}{6n(n-1)} \right] \right\} = \\ = \frac{d}{I_d} \left\{ M_{1-2} + \frac{g\ell^2}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{2n-1}{6n} \right) \right\} = \frac{d}{I_d} \times \left[M_{1-2} + \frac{g\ell^2}{12} (n+1) \right].$$

Vem portanto

$$\frac{\ell M_{1-2}}{I_\ell} \left(1 + \frac{dI_\ell}{\ell I_d} \right) = -\frac{g\ell^3}{12I_\ell} \left[1 + \frac{dI_\ell}{\ell I_d} (n+1) \right]; \quad M_{1-2} = -\frac{g\ell^2}{12} k$$

$$\text{em que } k = \frac{1 + \frac{d(n+1)}{\ell n} \frac{I_\ell}{I_d}}{1 + \frac{d}{\ell} \frac{I_\ell}{I_d}} = \frac{1 + \frac{n^2-1}{n^2} \frac{aI_\ell}{bI_d}}{1 + \frac{n-1}{n} \frac{aI_\ell}{bI_d}}$$

No caso de ser $I_\ell = I_d$ teremos

$$n = 2, k = \frac{4b + 3a}{4b + 2a} \begin{cases} = 1,08 \text{ para } a = 0,4b \\ = 1,17 \text{ para } a = b \end{cases}$$

$$n = \infty, k = 1,00$$

Portanto o momento de encastramento perfeito pouco difere, em qualquer caso, do que corresponde à escada recta sujeita à mesma hipótese de carga.

6.5.2 - ACTUAÇÃO DE CARGAS F CONCENTRADAS NOS VÉRTICES

$$V_1 = V_2 = \frac{F}{2}(n-1) \text{ (FIG. 6.10)}$$

$$\text{Nos trechos horizontais: } M = M_{1-2} + \frac{F}{2}(n-1)x - (i-1)Fx + \frac{(i-1)i}{2} \frac{F\ell}{n}$$

$$\text{Nos trechos verticais: } M = M_{1-2} + \frac{F\ell}{2} \frac{n-1}{n} i - \frac{F\ell}{2n} i(i-1)$$

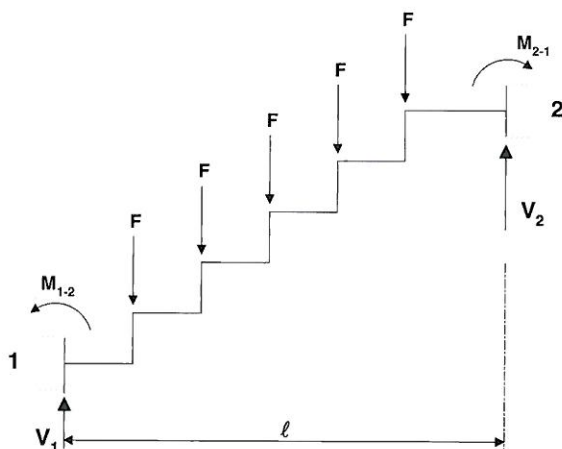


Fig.6.10 - Escada perfeitamente encastrada, de eixo quebrado com n degraus, sujeita a cargas concentradas F nos vértices.

sendo, em qualquer hipótese, $\frac{\partial M}{\partial M_{1-2}} = 0$

A equação resolvente é $\int_0^{(\ell+d)} \frac{M}{EI} ds = 0$, que nos dá

$$\frac{1}{I_\ell} \left\{ M_{1-2} \int_0^\ell dx + \frac{F}{2} (n-1) \int_0^\ell x dx - \sum_{i=1}^{i=n} (i-1) F \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} x dx + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{(i-1)i}{2} \frac{Fi}{n} \times \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} dx \right\} +$$

$$+ \frac{1}{I_d} \left\{ M_{1-2} \int_0^d dy + \frac{Fi}{2} \frac{n-1}{n} \times \sum_{i=1}^{i=(n-1)} i \Delta y - F \frac{\ell}{2n} \sum_{i=1}^{i=(n-1)} i(i-1) \Delta y \right\} = 0$$

A soma do 1º colchete é calculada como segue:

$$1- \quad \quad \quad 2-$$

$$M_{1-2} \int_0^\ell dx = M_{1-2} \quad ; \quad \frac{F}{2} (n-1) \int_0^\ell x dx = \frac{F\ell^2}{4} (n-1)$$

$$F \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} x dx = \frac{F\ell^2}{2} \left[\frac{i^2}{n^2} - \frac{(i-1)^2}{n^2} \right] = \frac{F(2i-1)\ell^2}{2n^2} - \frac{F\ell^2}{2n^2} \sum_{i=1}^{i=n} (2i-1)(i-1) =$$

$$= \frac{F\ell^2}{2n^2} \sum_{i=1}^{i=n} (2i^2 - 3i + 1) = \frac{F\ell^2}{2n^2} \left[\frac{1}{3} n(n+1)(2n+1) - \frac{3}{2} n(n+1) + n \right] =$$

$$\frac{F\ell^2}{12n} (4n^2 - 3n - 1) \quad ; \quad F \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} dx = \frac{F\ell}{n}$$

$$\frac{F\ell^2}{2n^2} \sum_{i=1}^{i=n} (i^2 - i) = \frac{F\ell^2}{2n^2} \left[\frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) - \frac{n(n+1)}{2} \right] = \frac{F\ell^2(n^2-1)}{6n}$$

A soma destes termos tem por valor,

$$\frac{\ell}{I_\ell} M_{1-2} + \frac{F\ell^2}{I_\ell} \left[\frac{n-1}{4} - \frac{4n^2-3n-1}{12n} + \frac{n^2-1}{6n} \right] = \frac{\ell}{I_\ell} M_{1-2} + \frac{F\ell^2}{12nI_\ell} (n^2-1)$$

As parcelas dentro do 2º colchete calculam-se pela expressão $M_{1-2} \int_0^\ell dy = dM_{1-2}$

$$\frac{F\ell}{2} \frac{n-1}{n} \sum_{i=1}^{i=(n-1)} i \Delta y = \frac{PId}{4} (n-1) \frac{2n}{F\ell} \sum_{i=1}^{i=(n-1)} i(i-1) \Delta y = \frac{F\ell d}{n(n-1)} \times \sum_{i=1}^{i=(n-1)} (i^2 - i) = \frac{F\ell d}{6} (n-2)$$

e a sua soma tem por valor

$$\frac{1}{EI_d} \left[dM_{1-2} + \frac{F\ell d}{4} (n-1) - \frac{F\ell d}{6} (n-2) \right] = \frac{1}{EI_d} \left[dM_{1-2} + \frac{F\ell d}{12} (n+1) \right]$$

Vem portanto $M_{1-2} \left[\frac{\ell}{I_\ell} + \frac{d}{I_d} \right] = -\frac{F\ell}{12} \left[\frac{\ell(n^2 - 1)}{nI_\ell} + \frac{d(n+1)}{I_d} \right]$ expressão que, para

$d=0$ se converte em $M_{1-2} = -\frac{n^2 - 1}{12n} F_\ell$, que exprime o momento de encastramento perfeito da laje horizontal de eixo rectilíneo sujeito ao mesmo sistema de acções.

Pondo em evidência o valor do momento de encastramento perfeito da escadade eixo rectilíneo de igual vão ℓ igualmente carregada, resulta

$$M_{1-2} = -\frac{F\ell(n^2 - 1)}{12n} \frac{\frac{I_d}{I_\ell} + \frac{d}{\ell} \frac{n}{n-1}}{\frac{I_d}{I_\ell} + \frac{d}{\ell}} = -\frac{F\ell(n^2 - 1)}{12n} k$$

$$\text{em que } k = \frac{1 + \frac{nd}{(n-1)\ell} \frac{I_\ell}{I_d}}{1 + \frac{d}{\ell} \frac{I_\ell}{I_d}} = \frac{1 + \frac{a}{b} \frac{I_\ell}{I_d}}{1 + \frac{aI_\ell}{bI_d} \frac{n-1}{n}}$$

atendendo a que $d = (n - 1)a$ e $b = n\ell$.

Como fizemos anteriormente, particularizando o valor de k para o caso de ser $I_d = I_\ell$ (escada de momento de inércia constante) obtém-se:

$$\text{Para } n = 2 \quad k = \frac{1 + \frac{a}{b}}{1 + \frac{a}{2b}} = \begin{cases} 1,17 \text{ para } a = 0,4b \\ 1,33 \text{ para } a = b \end{cases}$$

Para $n = \infty$, $k = 1$

6.5.3 - DESLOCAMENTO Δy DO APOIO 1 NA DIRECÇÃO PERPENDICULAR AOS TRECHOS HORIZONTAIS DA ESCADA

Considerando a escada sem carregamento temos, para o deslocamento - Δy do apoio 1 (Fig. 6.11), o sistema resolvente seguinte:

$$\begin{cases} \int_0^{\ell+d} \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial M_{1-2}} ds = 0 \\ \int_0^{\ell+d} \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial V_1} ds = 0 \end{cases}$$

Nos trechos horizontais $M = -V_1 x + M_{1-2}$; $\frac{\partial M}{\partial M_{1-2}} = 1$; $\frac{\partial M}{\partial V_1} = -x$

Nos trechos verticais $M = M_{1-2} - \frac{V_1 \ell}{n} i$; $\frac{\partial M}{\partial M_{1-2}} = 1$; $\frac{\partial M}{\partial V_1} = -\frac{\ell i}{n}$

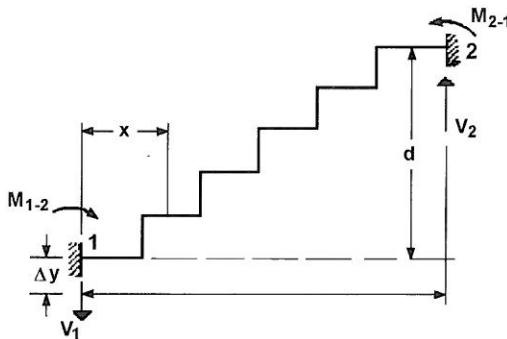


Fig.6.11 - Deslocamento - Δy do apoio 1 da escada encastrada e de eixo quebrado com n degraus

Temos portanto

$$\begin{cases} \frac{1}{I_\ell} \int_0^\ell (-V_1 x + M_{1-2}) \sum_{i=1}^{i=n-1} \left(M_{1-2} - \frac{V_1 \ell}{n} i \right) = 0 \\ \frac{1}{I_\ell} \int_0^\ell (-V_1 x^2 + M_{1-2} x) dx + \frac{d}{(n-1)I_d} \sum_{i=1}^{i=n-1} \left(M_{1-2} - \frac{i\ell}{n} i - V_1 \frac{\ell^2 i^2}{n^2} \right) = E\Delta y \\ \frac{1}{I_\ell} \left(-\frac{V_1 \ell^2}{2} + \ell M_{1-2} \right) + \frac{d}{I_d} \left(M_{1-2} - n \frac{V_1 \ell}{2n} \right) = 0 \end{cases}$$

$$\frac{V_1 \ell^3}{3} + M_{1-2} \frac{\ell^2}{2} + \frac{d I_\ell}{(n-1) I_d} \left[M_{1-2} \frac{i}{n} \frac{n(n-1)}{2} - \frac{V_1 \ell^2}{6n^2} n(n-1)(2n-1) \right] = -E\ell \Delta y$$

$$V_1 = \frac{2M_{1-2}}{\ell}; \quad M_{1-2} = \frac{6EI_\ell \Delta y}{1+k-\frac{2k}{n}} = -M_{1-2}; \quad V_1 = -V_2 = -\frac{12EI_\ell \Delta y}{1+k-\frac{2k}{n}}$$

em que $k = \frac{dI_\ell}{\ell I_d}$, sendo $k = 1$ para $d = 0$ (laje de eixo rectilíneo).

6.5.4 - RIGIDEZ E COEFICIENTE DE TRANSMISSÃO DA ESCADA ENCASTRADA NOS DOIS APOIOS

Rodando o apoio 1 do ângulo θ temos nos trechos horizontais $M = M_{1-2} + V_1 x$

e nos trechos verticais $M = M_{1-2} - \frac{V_1 \ell}{n} i$

O sistema resolvente é

$$\begin{cases} \int_0^{\ell+d} \frac{M}{EI} ds = 1 \\ \int_0^{\ell+d} \frac{M}{EI} x ds = 0 \end{cases}$$

LAJES E ESCADAS DE BETÃO ARMADO

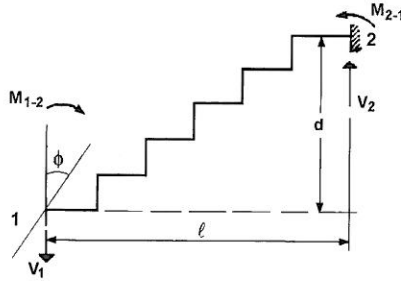


Fig.6.12- Rigidez e coeficiente de transmissão da escada encastrada de eixo quebrado com n degraus

que nos dá, tendo em conta o indicado em 6.5.3

$$\begin{cases} M_{1-2}(1+k) - \frac{V_1 \ell}{2}(1+k) = \frac{EI_\ell}{\ell} \\ M_{1-2}(1+k) - \frac{V_1 \ell}{3}\left(1+k - \frac{k}{2n}\right) = 0 \end{cases} \quad \text{em que: } k = \frac{d I_\ell}{\ell I_d}$$

donde se tira o valor de V_1 , $V_1 = \frac{6EI}{\ell^2(1+k - \frac{2k}{n})}$

a rigidez K da escada $K = M_{1-2} = \frac{4EI_\ell(1+k - \frac{k}{2n})}{\ell(1+k)(1+k - \frac{2k}{n})}$; $M_{2-1} = \frac{-2EI_\ell(1+k + \frac{k}{n})}{\ell(1+k)(1+k - \frac{2k}{n})}$

e o coeficiente de transmissão $\eta = -\frac{M_{2-1}}{M_{1-2}} = \frac{1+k + \frac{k}{n}}{2\left(1+k - \frac{k}{2n}\right)}$

valor este que assume o valor $\eta = \frac{1}{2}$ para $d = 0$ (laje de eixo rectilíneo) praticamente

constante. Assim, para $I_\ell = I_d$ e $b = 2a$ resulta $K = \frac{n-1}{2n} = 0,45$; $\eta = 0,52$. A rigidez deve

ser encarada de modo diferente resultando, para $I_\ell = I_d$, $b = 2a$ e $n = 10$,

$$K = \frac{4EI}{\ell} \frac{(1,45 - 0,0225)}{1,45(1,45 - 0,45)} = \frac{2,89EI}{\ell} \quad (\text{vidé Quadro 6.2}) \text{ concluindo-se que a escada de}$$

eixo quebrado é muito menos rígida que a escada de eixo rectilíneo, com o mesmo vão, mas o coeficiente de transmissão daquela aproxima-se do que corresponde a esta.

Na hipótese de actuar uma solicitação simétrica podemos considerar metade da viga tomando para sua rigidez

$$K_v = K(1 - \eta) = \frac{2EI_\ell}{\ell(1 + k)} .$$

Na hipótese de actuação de uma solicitação antisimétrica,

$$K'_v = K(1 - \eta) = \frac{6EI_\ell}{\ell} \frac{1 + k + \frac{k}{n}}{1 + k - \frac{2k}{n}} \text{ em que } k = \frac{dI_\ell}{\ell I_d} = \frac{aI_\ell}{bI_d} \frac{n-1}{n}$$

6.5.5 - RIGIDEZ DA ESCADA ARTICULADA NUM DOS APOIOS E ENCASTRADA NO OUTRO

Este caso pode ser directamente deduzido do indicado em 6.5.4, aplicando no apoio 2 um momento que anula o que ali existe. Assim vem

$$K_{1-2} = (M_{1-2} + nM_{2-1}) - \frac{4EI_\ell \left(1 + k - \frac{k}{2n}\right)}{\ell(1+k) \left(1 + k - \frac{2k}{n}\right)} - \frac{2EI_\ell \left(1 + k + \frac{k}{n}\right)}{\ell(1+k) \left(1 + k - \frac{2k}{n}\right)} \frac{1 + k + \frac{k}{n}}{2 \left(1 + k - \frac{k}{2n}\right)} = \frac{3EI_\ell}{1 + k - \frac{k}{2n}} .$$

$$\text{Para } n = \infty, \text{ é } K_{1-2} = \frac{3EI_\ell}{\ell \left(1 + \frac{a I_\ell}{b I_d}\right)}$$

LAJES E ESCADAS DE BETÃO ARMADO

No quadro seguinte apresenta-se uma tabela para os valores de α e η

Valores de	$\frac{I_f}{I_d}$	$\frac{a}{b}$	Valores de n								
			2	3	4	5	6	7	8	9	10
$K = \alpha \frac{EI_f}{\ell}$	2,0	0,5	3,65	3,07	2,75	2,60	2,46	2,40	2,35	2,30	2,28
		1,0	3,50	2,5	2,50	2,12	1,92	1,80	1,72	1,59	1,54
	1,0	0,5	3,80	3,45	3,25	3,14	3,06	3,00	2,97	2,94	2,91
		1,0	3,65	3,07	2,75	2,60	2,46	2,40	2,35	2,30	2,28
η	0,5	0,5	3,90	3,70	3,60	3,50	3,45	3,40	3,39	3,38	3,38
		1,0	3,80	3,45	3,25	3,14	3,06	3,00	2,97	2,94	2,91
	2,0	0,5	0,68	0,61	0,58	0,56	0,56	0,56	0,55	0,54	0,54
		1,0	0,72	0,66	0,62	0,60	0,58	0,57	0,56	0,56	0,55
	1,0	0,5	0,58	0,57	0,55	0,54	0,54	0,54	0,53	0,53	0,52
		1,0	0,68	0,61	0,58	0,56	0,56	0,56	0,55	0,54	0,54
	0,5	0,5	0,55	0,54	0,53	0,52	0,52	0,52	0,52	0,52	0,52
		1,0	0,58	0,57	0,55	0,54	0,54	0,54	0,53	0,53	0,52

6.6 - EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

Os exemplos apresentados a seguir têm em vista não só a aprendizagem da utilização do formulário, mas também a análise do modo de disposição das armaduras.

Exemplo 6.1 - Elaborar os diagramas dos esforços M, V e N e determinar a flecha elástica máxima da estrutura em balanço de betão armado (B30) esquematizada na Fig. 6.13 ($n = 2$), sendo o momento de inércia da secção transversal $I = 166\ 667\text{ cm}^4$ (250cm x 20cm).

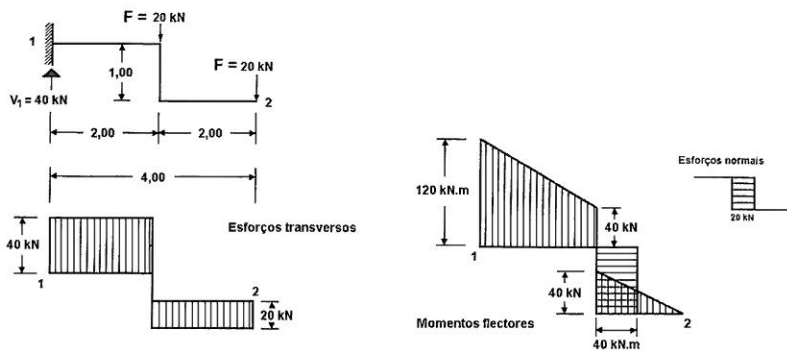


Fig. 6.13 - Diagramas dos esforços transversos e normais e dos momentos flectores para a viga em consola, com dois trechos horizontais e um vertical, sujeita a uma carga uniformemente distribuída



$$V_1 = 2F = 2 \times 20 = 40 \text{ kN}; \quad V_{\ell/2} = 40 / 20 \text{ kN}$$

$$M_{1-2} = -20(4,0 + 2,0) = 120 \text{ kN.m}$$

$N = 20 \text{ kN}$ no trecho vertical (tracção)

$$\text{Flecha elástica na extremidade livre } f_2 = \frac{F\ell^3}{24EI} \left[(3n^2 + 4n + 1) + \frac{d}{\ell} (3n^2 + n - 2) \right]$$

$$E = 30,5 \text{ GPa} = 3050 \text{ kN/cm}^2 ; \quad EI = 3050 \times 166\,667 = 5,0833 \times 10^8 \text{ kN/cm}^2$$

$$\frac{F\ell^3}{24EI} = \frac{20 \times 4,0^3 \times 10^6}{24 \times 5,0833 \times 10^8} = 0,1049 \text{ kN/cm}$$

$$f_2 = 0,1049 \left[(3 \times 2^2 + 4 \times 2 + 1) + \frac{100}{400} (3 \times 2^2 + 2 - 2) \right] = 2,4 \text{ cm}$$

$$\frac{f_2}{\ell} = \frac{2,4}{400} = \frac{1}{167}, \text{ valor excessivo; é necessário aumentar a rigidez da escada.}$$

Exemplo 6.2 - Determinar os esforços na escada indicada na Fig.6.14 sendo o momento de inércia dos patamares igual ao dos cobertores dos degraus ($I = I_d$) e o momento de inércia dos espelhos, $I_d = 1,95 I_c$.

$$\text{Temos neste caso, vidé Quadro 6.3, anexo, } k = \frac{dI_\ell}{\ell_2 I_d} = \frac{0,72}{1,40 \times 1,95} = 0,264 ,$$

resolvendo-se o problema pelo método de iteração de Cross.

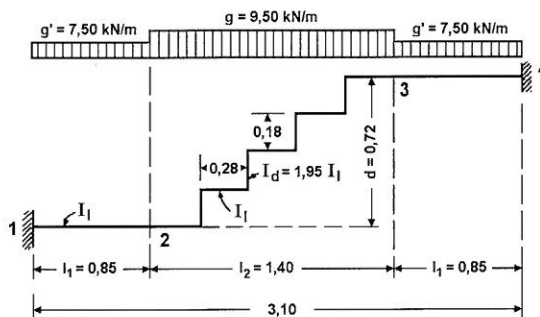


Fig.6.14 - Carregamento e características geométricas da escada

Momentos de encastramento perfeito nos patamares $\frac{7,50 \times 0,85^2}{12} = 0,45 \text{ kN.m}$;
 momentos $M_{2-3} = M_{3-2}$ de encastramento perfeito na zona em degraus, vidé Quadro 6.2:

$$\frac{9,50 \times 1,40^2}{12} \frac{1 + 0,264 \frac{5+1}{5}}{1 + 0,264} = 1,63 \text{ kN.m}$$

A rigidez K nos patamares é $K = \frac{4EI_\ell}{\ell_1} = \frac{4}{0,85} EI_\ell = 4,70 EI_\ell$ e na zona em degraus, 1ª e 2ª etapas, em que respectivamente se consideram a rotação e os deslocamentos verticais dos nós 2 e 3 (solicitações simétricas) temos:

$$K_v = \frac{2EI_\ell}{1,40(1 + 0,264)} = 1,13 EI_\ell$$

Os coeficientes de distribuição são, respectivamente nos patamares e na zona de degraus, os seguintes:

$$\frac{4,70}{4,70 + 1,13} = 0,806 \quad \text{e} \quad \frac{1,13}{4,70 + 1,13} = 0,194$$

As distribuições de momentos que correspondem à 1ª etapa (nós fixos relativamente a deslocamentos) e à 2ª etapa (deslocamento vertical dos nós 2 e 3) constam da Fig.6.15.

Na 2ª transmissão tomaram-se para momentos iniciais 1 000 x, só nos patamares porquanto a viga quebrada se desloca paralelamente a si mesma.

Equação de equilíbrio do nó 2 $\left(\sum V = 0 \right)$

$$\frac{7,50 \times 0,85}{2} + \frac{9,50 \times 1,40}{2} + \frac{1,40 + 0,02}{0,85} = \frac{5,97 + 1,94}{0,85} k; \quad k = \frac{11,508}{930,6} = 0,0124$$

Momentos finais e reacções

$$M_{1-2} = -0,02 + 597 \times 0,0124 = 7,4 \text{ kN.m}$$

$$M_{2-3} = -1,40 + 194 \times 0,0124 = 1,0 \text{ kN.m}$$

$$V_1 = V_4 = 7,50 \times 0,85 + 9,50 \times 0,70 = 13,0 \text{ kN}$$

Verificação: $M_{2-1} = 13,0 \times 0,85 - 7,4 - 7,5 \times \frac{0,85^2}{2} = 1,0 \text{ kN.m}$

Momento flector a meio vão:

$$M_{\ell/2} = 13,0 \times 1,55 - 7,5 \times \frac{1,55^2}{2} - 9,5 \times \frac{0,72}{2} - 7,40 = 3,5 \text{ kN.m}$$

Os valores calculados estão referidos na Fig.6.16.

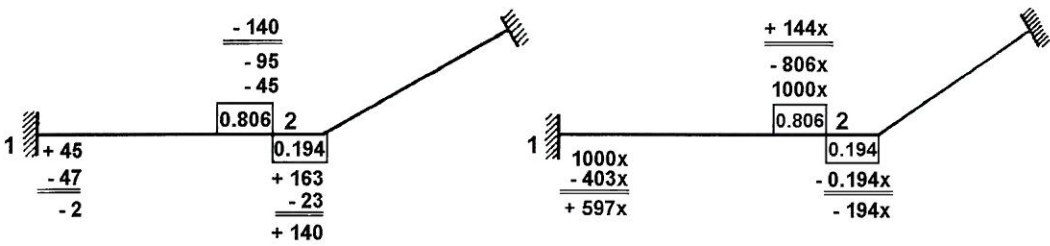


Fig.6.15 - Distribuição de momentos

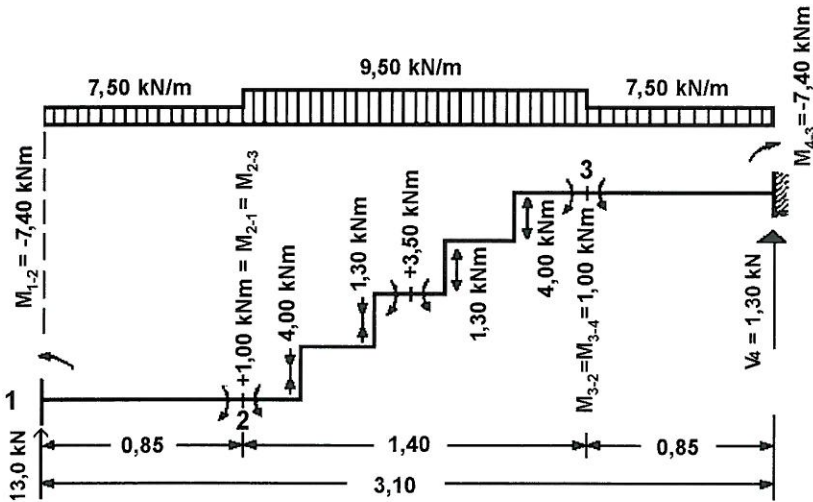


Fig.6.16- Reacções e esforços no lanço de escada do exemplo 6.2

Exemplo 6.3 - Estudo da disposição das armaduras no caso do lanço da escada apoiado nas duas extremidades.

Na análise da disposição mais convenientes das armaduras, devem ter-se em conta três questões:

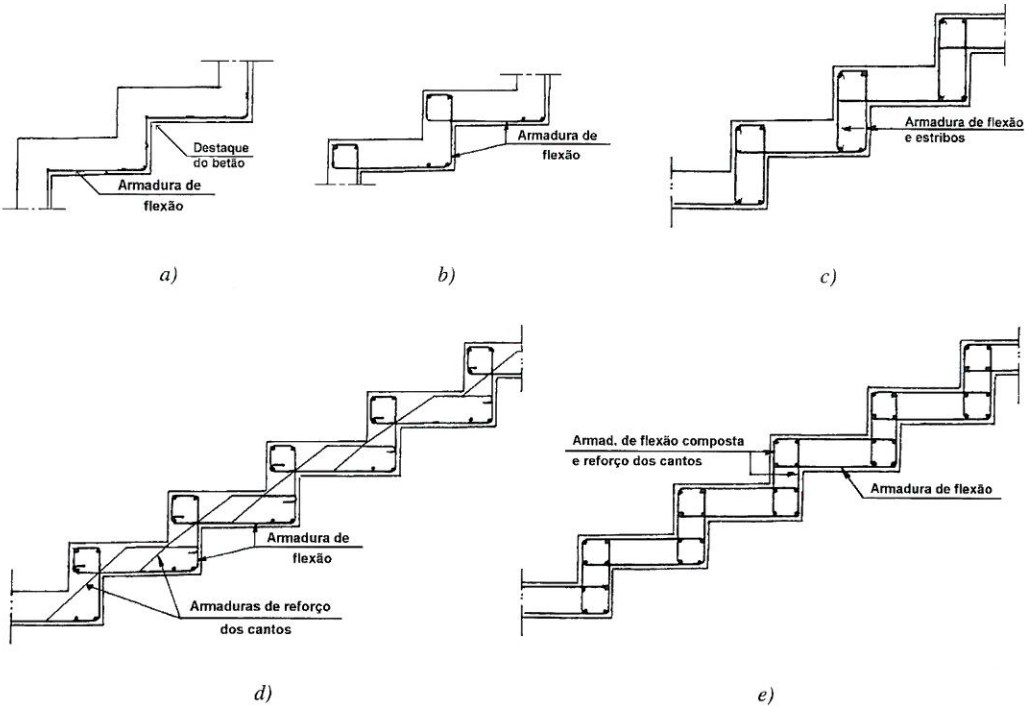


Fig.6.17 - Modalidades da disposição das armaduras

1ª A armadura não deve dispor-se a todo o comprimento, junto à face inferior da escada pois que nos cantos reentrantes o betão tende a destacar-se à medida que essa armadura resistente é traccionada, Fig. 6.17 a). Para resolver esta questão dobram-se os ferros da armadura de flexão de acordo com a Fig.6.17 b).

2ª Os elementos verticais estão sujeitos a esforço normal que é de tracção na metade superior dos vãos apoiados.

A solução esquematizada na Fig. 6.17 c) assegura melhor a continuidade entre elementos verticais e horizontais. No entanto C.P.Chern realizou em 1965 ensaios de resistência deste tipo de estrutura tendo concluído que a disposição de armaduras indicada na Fig. 6.17 d) duplica a capacidade resistente da escada relativamente à indicada na Fig. 6.17 b).

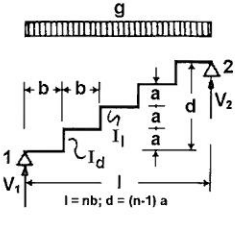
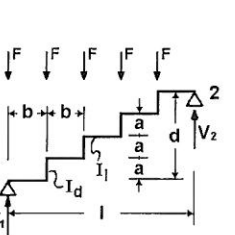
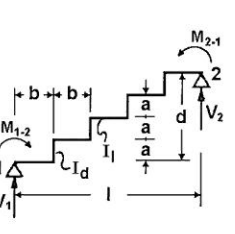
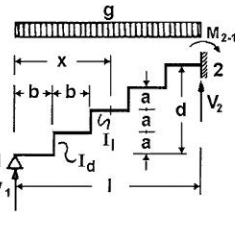
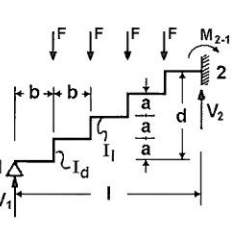
A modalidade e) protege todas as reentrâncias dos degraus, com melhoria de produtividade na execução.

Quadro 6.1 - Momentos e flechas máximas nas lajes de eixo rectilíneos (*)

Hipótese de sustentação						
Hipótese de carga						
	n par	$M_{l/2} = \frac{n}{8} F \ell$ $f_{l/2} = \frac{5n^2 - 4}{384n} F \ell^3$	$M_{l/2} = \frac{n^2 + 2}{24n} F \ell$ $f_{l/2} = \frac{n}{384n} F \ell^3$	$M_{1-2} = M_{2-1} = -\frac{n^2 - 1}{12n} F \ell$	$V_1 = \frac{3n^2 - 4n + 1}{8n} F$ $f_{l/2} = \frac{2n^2 - 1}{384n} F \ell^3$	$M_{2-1} = -\frac{n^2 - 1}{8n} F \ell$
	n ímpar	$M_{l/2} = \frac{n^2 - 1}{8n} F \ell$ $f_{l/2} = \frac{(n^2 - 1)(5n^2 + 1)}{384n^3} F \ell^3$	$M_{l/2} = \frac{n^2 - 1}{24n} F \ell$ $f_{l/2} = \frac{(n^4 - 1)}{384n^3} F \ell^3$		$V_1 = \frac{3n^2 - 4n + 1}{8n} F$ $f_{l/2} = \frac{2n^4 - n^2 - 1}{384n^3} F \ell^3$	
	n par	$M_{l/2} = \frac{n}{8} F \ell$ $f_{l/2} = \frac{5n^2 + 2}{384n} F \ell^3$	$M_{l/2} = \frac{n^2 - 1}{24n} F \ell$ $f_{l/2} = \frac{n}{384n} F \ell^3$	$M_{1-2} = M_{2-1} = -\frac{2n^2 + 1}{24n} F \ell$	$V_1 = \frac{6n^2 - 1}{16n} F \ell$ $f_{l/2} = \frac{4n^2 + 1}{768n} F \ell^3$	$M_{2-1} = -\frac{2n^2 + 1}{16n} F \ell$
	n ímpar	$M_{l/2} = \frac{n^2 + 1}{8n} F \ell$ $f_{l/2} = \frac{(5n^2 + 1) + 4}{1920n^3} F \ell^3$	$M_{l/2} = \frac{n^2 + 2}{24n} F \ell$ $f_{l/2} = \frac{5n^4 + 1}{384n^3} F \ell^3$		$V_1 = \frac{6n^2 - 1}{16n} F \ell$ $f_{l/2} = \frac{4n^4 + n^2 + 2}{768n^3} F \ell^3$	

(*) De acordo com o RSA o dimensionamento das escadas considera em geral a actuação de sobrecargas uniformemente distribuídas q. Os sistemas de forças concentradas F equidistantes indicados neste quadro contemplam respectivamente as hipóteses de actuação das forças nas secções de inserção dos espelhos e a meio dos cobertores. Só foi desenvolvida a primeira destas duas hipóteses.

Quadro 6.2 - Escadas ortoquebradas.
Esforços máximas, coeficientes de transmissão e rigidez

<p>1</p>  <p>$l = nb; d = (n-1)a$</p>	$V_1 = V_2 = \frac{g\ell}{2}; M_{f/2} = \frac{g\ell^2}{8}$ <p>Nos trechos horizontais, $V = g\left(\frac{\ell}{2} - x\right); N = 0; M_x = \frac{gx}{2}(\ell - x)$</p> <p>Nos trechos verticais, $V = 0; N = g\left(\frac{\ell}{2} - x\right); M_x = \frac{gx}{2}(\ell - x)$</p> $n \text{ par, } f_{f/2} = \frac{5g\ell^4}{384nEI_f} \left[1 + \frac{dI_f}{\ell I_d} \frac{5n^2 + 4}{5n(n-1)} \right] \quad n \text{ impar, } f_{f/2} = \frac{5g\ell^4}{384EI_f} \left[1 + \frac{dI_f}{\ell I_d} \frac{(n^2 - 1)(5n^2 + 3)}{5n^2(n-1)} \right]$
<p>2</p> 	$V_1 = V_2 = \frac{F}{2}(n-1) \begin{cases} \text{sendo par, } M_{f/2} = \frac{F\ell n}{8} \\ \text{sendo n impar, } M_{f/2} = \frac{n^2 - 1}{8n} F\ell \end{cases}$ $n \text{ par, } f_{f/2} = \frac{F\ell^3(5n^2 - 4)}{384nEI_f} \left[1 + \frac{dI_f}{\ell I_d} \frac{n}{n-1} \frac{5n^2 + 4}{5n^2 - 4} \right]$ $n \text{ impar, } f_{f/2} = \frac{F\ell^3(n^2 - 4)(5n^2 + 1)}{384n^2EI_f} \left[1 + \frac{dI_f}{\ell I_d} \frac{2n(5n^2 + 3)}{(n-1)(5n^2 + 1)} \right]$
<p>3</p> 	$f_{f/2} = \frac{(M_{1-2} + M_{2-1})^2}{16EI_f} (1+k)$ $n \text{ par, } k = \frac{dI_f}{\ell I_d} \quad n \text{ impar, } k = \frac{d(n^2 + 1)I_f}{\ell n(n-1)I_d}$
<p>4</p> 	$V_1 = \frac{3}{8}g\ell k; \text{ nos trechos horizontais } V_x = \frac{5}{8}(3\ell k - 8x); N = 0$ $V_2 = \frac{5}{8}g\ell k; \text{ nos trechos verticais } V_x = 0; \frac{g}{8}(3\ell k - 8x)$ $M_{2-1} = -\frac{g\ell^2}{8}[4 - 3k]; M_{f/2} = \frac{g\ell^2}{16}(3k - 2) \quad k = \frac{1 + \frac{(n-1)d}{n^2\ell} \frac{I_f}{I_d}}{1 + \frac{(2n-1)d}{2n\ell} \frac{I_f}{I_d}}$
<p>5</p> 	$V_1 = \frac{(n-1)(3n-1)}{8n} Fk$ $V_2 = (n-1) \left[1 - \frac{3n-1}{8n} k \right] F$ $M_{2-1} = -\frac{n-1}{2} F\ell \left[1 - \frac{3n-1}{4n} k \right]$ $k = \frac{n + \frac{(n-2)}{(n-1)} \frac{dI_f}{\ell I_d}}{n + \frac{(2n-1)d}{2\ell n I_d} \frac{I_f}{I_d}}$



Quadro 6.3 - Escadas ortoquebradas
Esforços e flechas máximos

<p>6</p>	$V_1 = V_2 = \frac{g\ell}{2}$ $M_{1-2} = M_{2-1} = -\frac{g\ell^2}{12}k; \quad M_{f/2} = \frac{g\ell^2}{24}(3-2k)$ $k = \frac{1 + \frac{dI_1}{\ell I_d} \left(\frac{n+1}{n} \right)}{1 + \frac{dI_1}{\ell I_d}}$
<p>7</p>	$V_1 = V_2 = \frac{F}{2}(n-1); \quad n \text{ par}, \quad M_{f/2} = \frac{F\ell}{24} \left[3n - \frac{2(n^2-1)}{n}k \right]$ $M_{1-2} = M_{2-1} = -\frac{F\ell(n^2-1)}{12n}; \quad n \text{ impar}, \quad M_{f/2} = \frac{F\ell}{24n} (n^2-1)(3-2k)$ $k = \frac{1 + \frac{dnI_1}{\ell(n-1)I_d}}{1 + \frac{dI_1}{\ell I_d}} \quad n \text{ par}, \quad M_{f/2} = \frac{F\ell}{24n} [3n^2 - 2(n^2-1)k]$
<p>8</p>	$V_1 = -V_2 = -\frac{12EI_1}{1+k-\frac{2k}{n}}\Delta$ $M_{1-2} = -M_{2-1} = -\frac{6EI_1}{1+k-\frac{2k}{n}}\Delta$ $k = \frac{dI_1}{\ell I_d}$
<p>9</p>	$\text{Rigidez } K = \frac{4EI_1 \left(1+k-\frac{k}{2n} \right)}{\ell(1+k) \left(1+k-\frac{2k}{n} \right)}; \quad k = \frac{dI_1}{\ell I_d} \quad \text{Coeficiente de transmissão } \eta = -\frac{1+k+\frac{k}{n}}{2 \left(1+k-\frac{k}{2n} \right)}$ $\text{Rigidez virtual (estrut. simétrica)} \begin{cases} \text{solicit. simétrica} & K_r = \frac{2EI_1}{\ell(1+k)} \\ \text{solicit. antisimétrica} & K'_r = \frac{GEI_1}{\ell} + \frac{1+k+\frac{k}{n}}{1+k-\frac{2k}{n}} \end{cases}$
<p>10</p>	$\text{Rigidez } K_{2-1} = \frac{3EI_1}{\ell \left(1+k-\frac{k}{2n} \right)}$ $\text{Coeficiente de transmissão } \eta_{2-1} = 0$ $k = \frac{dI_1}{\ell I_d}$

CAPÍTULO 7

• Escadas em Caracol

7.1 - CONCEITO

Designam-se por escadas em caracol as que têm os degraus ligados a um pilar central, que é, nos casos correntes, de secção circular quando as escadas são inscritas num cilindro de revolução.

Estas escadas podem ocupar espaços muito restritos de forma circular em planta, cujo diâmetro não deve ser inferior a 1,40 m; a este valor corresponde um pilar central de 20 cm de diâmetro e uma escada com 60 cm de largura. O diâmetro exterior destas escadas não excede em regra os 3,0 m, sendo frequentes as escadas de 2,0 m, que permitem degraus com 0,85 m de largura; para diâmetros inferiores a 2,0 m os utentes destas escadas têm a sensação de falta de espaço. Para poder transportar através duma escada de caracol um doente de maca, torna-se necessário um diâmetro exterior mínimo de 2,70 m e degraus com 1,20 m de largura (Fig.7.1).

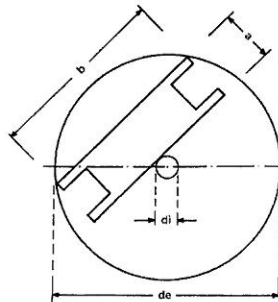


Fig.7.1 - Posicionamento duma maca numa escada em caracol

De facto, d_e (Fig. 7.1) pode ser determinado através da seguinte expressão:

$$d_e = 2\sqrt{(a + r_i)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} \quad ; \quad \text{para } a = 0,585 \text{ m; } b = 2,29 \text{ m; } d_i = 0,25 \text{ m vem}$$

$$d_e = 2\sqrt{(0,585 + 0,125)^2 + 1,145^2} = 2,70 \text{ m}$$

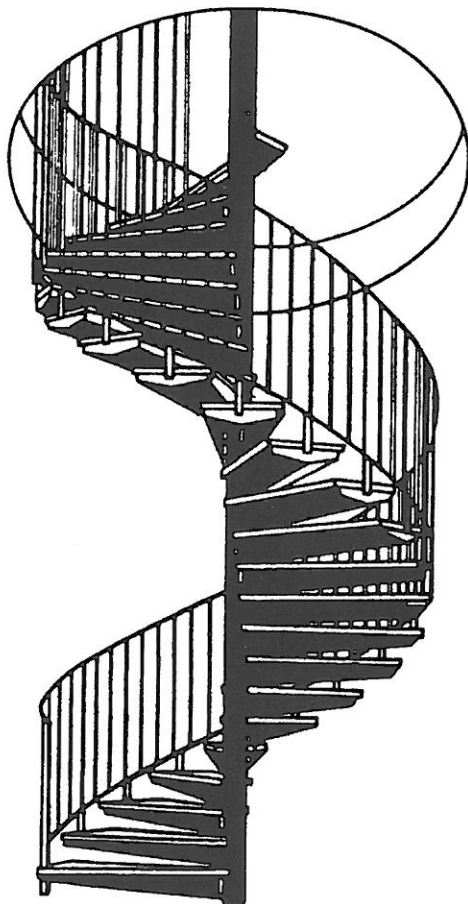


Fig.7.2 - Escada helicoidal de degraus independentes entre si e em consola do pilar central.

Os degraus dispõem-se geralmente em consola, Fig.7.2, podendo também apoiar-se no pilar central e numa viga heliocoidal periférica, Fig. 7.3, ou ainda na caixa de escada, que pode ter forma prismática (de planta quadrada ou rectangular, como nas figuras 7.4 e 7.5 ou hexagonal) ou então uma forma cilíndrica com base circular, Fig.7.6.

Os degraus podem ser soltos ou independentes entre si, conforme exemplificado nas figuras 7.2, 7.3 e 7.9a, ou de qualquer modo interligados como nas figuras 7.7 e 7.9 b, conferindo ou não continuidade à superfície que inferiormente os limita.

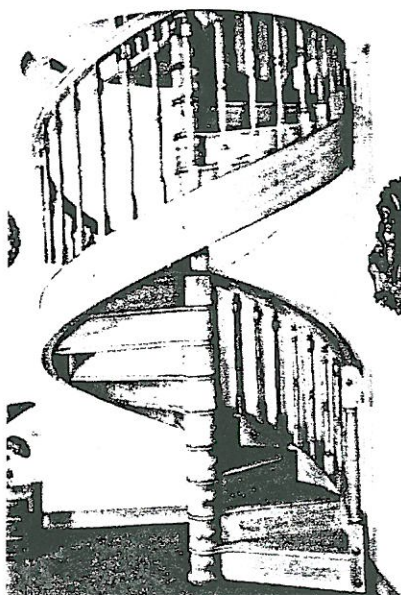


Fig7.3 - Escada em caracol com os degraus apoiados numa viga helicoidal periférica.

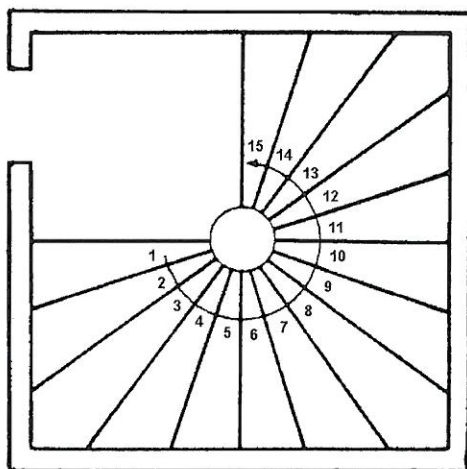


Fig. 7.4 - Escada em caracol com os degraus apoiados em caixa de escada de base quadrada

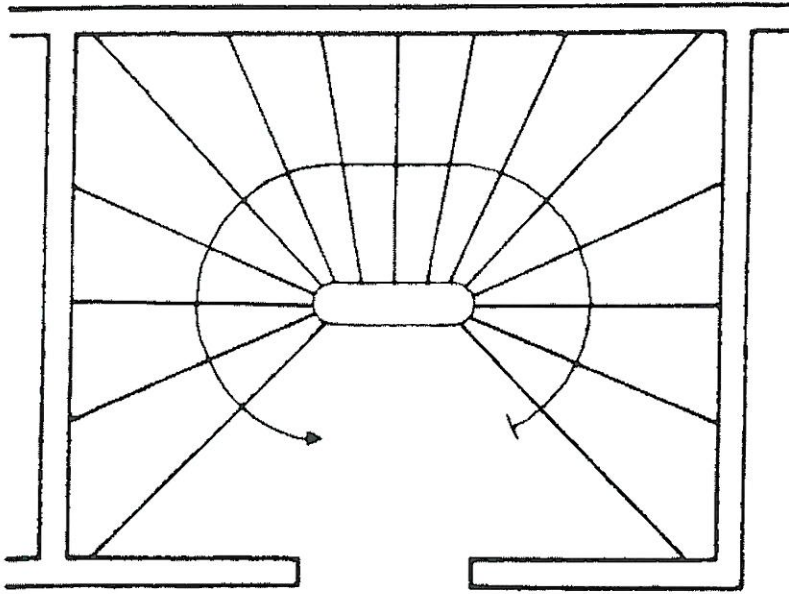


Fig. 7.5 - Escada em caracol com os degraus apoiados em pilar rectangular e em caixa de escada de base rectangular

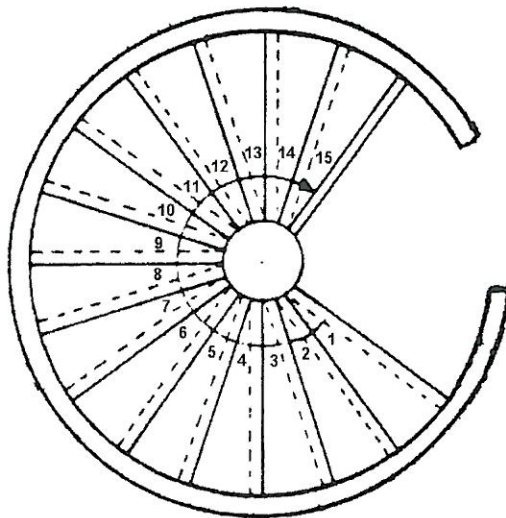


Fig. 7.6 - Escada em caracol com pilar e caixa em escada cilíndrica de base circular.

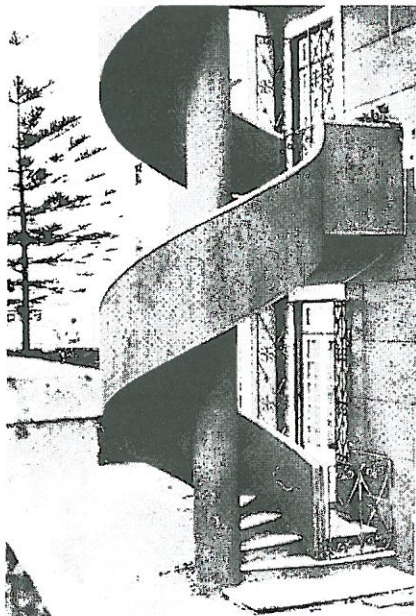


Fig. 7.7 - Escada de caracol com degraus interligados.

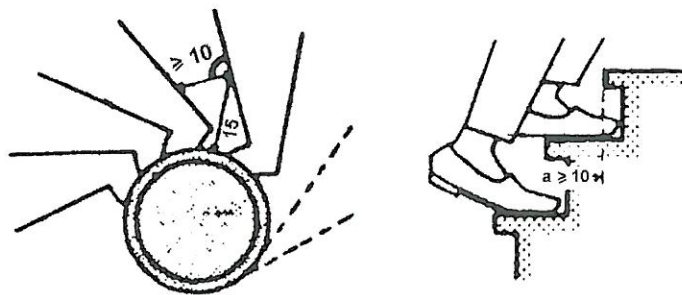


Fig. 7.8 - Largura mínima dos degraus de uma escada em caracol junto ao pilar central.

A largura dos degraus é geralmente variável neste tipo de escadas, não devendo ser menor do que 10 cm a uma distância de 12 cm da geratriz do pilar central, Fig.7.8.

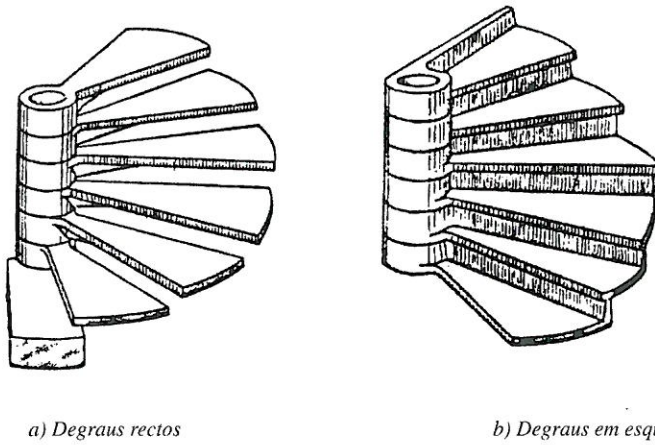


Fig.7.9 - Escadas em caracol com degraus individualizados para construção préfabricada.

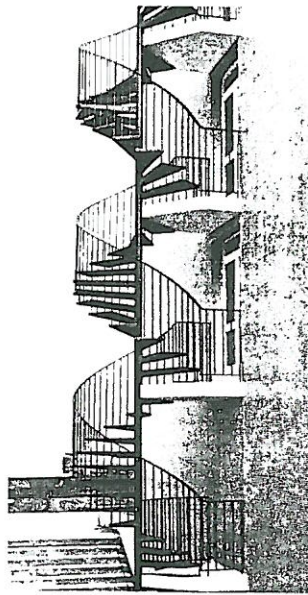


Fig.7.10 - Escada exterior com patamares ao nível dos pisos.

As escadas em caracol podem ser moldadas no local ou prefabricadas, podendo neste último caso utilizar-se repetidas vezes, um molde simples para a moldagem individual de cada um dos degraus; estes apresentam um anel junto à sua parte mais estreita, Figs. 7.12 e 7.13, que serve de molde ao pilar central que é betonado no local.

Cada degrau pode ser colocado manualmente na sua posição, dado que o seu pequeno peso, permite o manuseamento por dois homens; deve previamente dispor-se de uma construção provisória, de madeira ou de tubo de andaime, que sirva de apoio e nivelamento aos sucessivos degraus, para que se verifique o correcto posicionamento de cada um deles e a montagem ajustada da escada.

O pilar deve ser betonado por trechos sucessivos de altura reduzida, para permitir uma adequada compactação.

7.2 - TRAÇADO DA ESCADA

Para o traçado, depois de fixar os diâmetros interior da escada e exterior do pilar, há que desenhar as circunferências que são projecção horizontal das duas hélices que limitam exterior e interiormente os degraus. Para isso divide-se a circunferência em partes iguais bem como o passo “a”, ou seja a altura correspondente a uma volta completa de extensão 1-1 ou AA, por exemplo, Fig.7.11.

Nesta figura tomou-se $n = 16$, que se numeraram no sentido ascendente da escada; projectando os pontos de divisão 1-2-3... da planta, interceptamos as linhas horizontais aos níveis 1, 2, 3, 4, etc. que definem as arestas interiores e exteriores dos degraus, em projecção vertical.

No caso de ser $a = 2,08$ m, o limite mínimo da divisão das circunferências da base é $n = 13$ correspondente a uma diferença de nível ou altura de $0,16 \times 13 = 2,08$ m entre degraus ($0,16 \times 13 = 2,08$ m = sobrepostos, ou seja, os correspondentes a um passo da hélice).

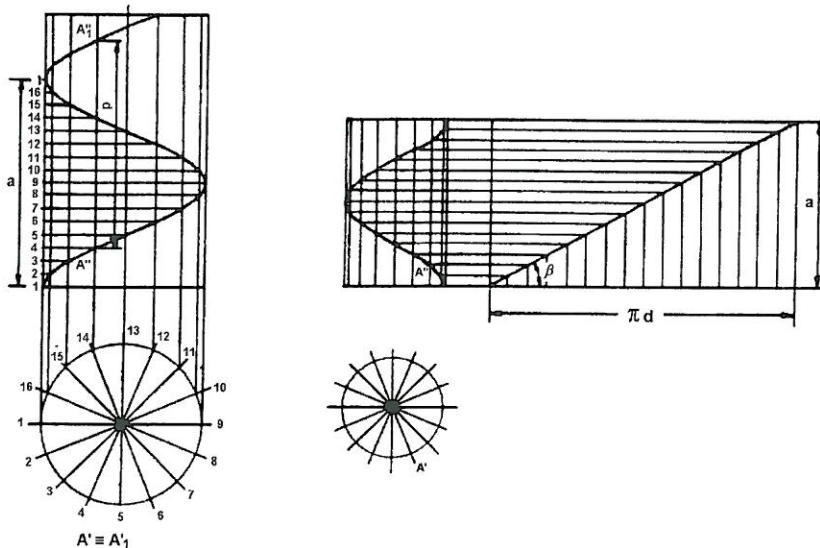


Fig.7.11 - Traçado de uma escada helicoidal.



Fig.7.12 - Aspectos da pré-moldagem dos degraus

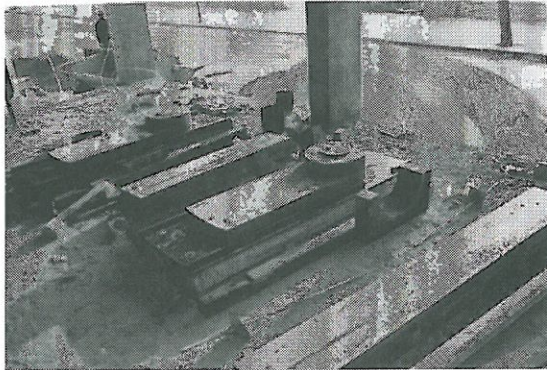


Fig.7.13 - Aspecto dos degraus depois de desmoldados.

7.3 - ESFORÇOS NA ESCADA

7.3.1 - GENERALIDADES

O pilar das escadas em caracol é solicitado à flexão composta por momentos flectores de eixo horizontal cuja direcção varia com o posicionamento dos degraus ao longo da escada e por consequência com as acções que são por eles transmitidas ao pilar central.

A cada ponto P de uma hélice cilíndrica, de ordenada x, medida na vertical, corresponde uma ordenada angular φ em projecção horizontal, Fig7.14, donde vem

$x = a \frac{\varphi}{2\pi}$ sendo a o passo; isto resulta do facto da hélice se transformar numa recta

quando se planifica a superfície cilíndrica a que a hélice pertence.

LAJES E ESCADAS DE BETÃO ARMADO

Se suposermos a actuação de uma carga g uniformemente distribuída na área A da projecção horizontal de um sector helicoidal da escada, definido pelos ângulos φ_1 e φ_2 , tal que, Fig.7.15 e 7.16, $\frac{\alpha}{2} = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}$; o momento M aplicado ao pilar é um vector

horizontal proporcional com a grandeza $\frac{\alpha}{2} = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}$.

$$\vec{M}_s = gSA d = \frac{2}{3} gr^3 \text{sen}^2 \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}$$

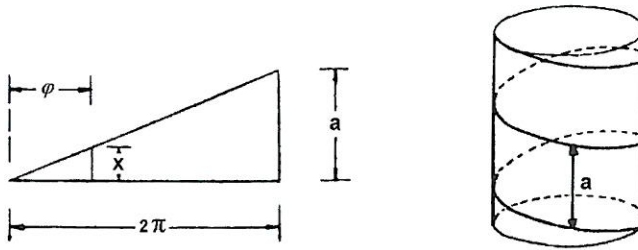


Fig.7.14 - Segmento helicoidal em perspectiva e planificado (passo a)

Com efeito, para um sector de coroa circular, fig.7.16, definido pelos raios r e r_i que limitam exterior e interiormente os degraus, temos:

$$c_e = \frac{2r}{3} \frac{\text{sen} \frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}}; \quad c_i = \frac{2r_i}{3} \frac{\text{sen} \frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}}$$

e as respectivas áreas $A_e = \frac{r^2 \alpha}{2}$; $A_i = \frac{r_i^2 \alpha}{2}$; $A = \frac{\alpha}{2} (r^2 - r_i^2)$

Assim, a ordenada d de G é

$$d = \frac{2r}{3 \frac{\alpha}{2}} \frac{\left[1 - \left(\frac{r_i}{r} \right)^3 \right]}{\left[1 - \left(\frac{r_i}{r} \right)^2 \right]} \text{sen} \frac{\alpha}{2} = \frac{4r}{3} \frac{\alpha}{2}$$

O momento, devido à referida carga g uniformemente distribuída na coroa circular de área A , em relação ao centro do pilar é, para $\alpha = (\varphi_2 - \varphi_1)$:

$$\vec{M}_g = g A d = g \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} r^2 \left[1 - \left(\frac{r_i}{r}\right)^2 \right] \times \frac{2r}{3 \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}} \frac{\left[1 - \left(\frac{r_i}{r}\right)^3 \right]}{\left[1 - \left(\frac{r_i}{r}\right)^2 \right]} \text{sen} \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}$$

ou, por ser $\left(\frac{r_i}{r}\right)^3$ sempre muito pequeno, $\vec{M}_g = \frac{2}{3} gr^3 \text{sen} \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}$. Do mesmo modo para a acção duma sobrecarga uniformemente distribuída q ,

$$\vec{M}_q = \frac{2}{3} qr^3 \text{sen} \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}$$

Estes momentos dos degraus produzem no pilar da escada momentos flectores que se determinam a partir das linhas de influência do momento flector na secção genérica definida pela abcissa x de uma barra de eixo rectilíneo e momento de inércia constante, quando essa barra é percorrida pelo momento unitário,

$$\vec{M}_g = 1 \quad \text{ou} \quad \vec{M}_q = 1$$

multiplicando-se os valores assim obtidos pelos valores de M_g e M_q .

Vamos considerar dois casos, um deles com o pilar central da escada em consola encastrado na base, e o outro caso com o pilar articulado nas duas extremidades.

7.3.2 - ESCADA COM PILAR CENTRAL EM CONSOLA E ENCASTRADO NA FUNDAÇÃO

7.3.2.1 - Actuação da acção permanente, g

Para esta hipótese consideremos n passos completos e tomemos OA (Fig.7.17 a) para origem da variável φ ; consideremos no 1º passo que estão carregados dois sectores dispostos simetricamente em relação a O , de abertura φ , um situado à esquerda e outro à direita da secção S . A carga permanente g no sector AOS , por estar situada à esquerda de S , não produz momentos; a carga g situada à direita da secção corresponde o momento, (Fig.7.17 b)

$$\vec{M}_g = \frac{2}{3} gr^3 \text{sen} \frac{\varphi}{2}$$

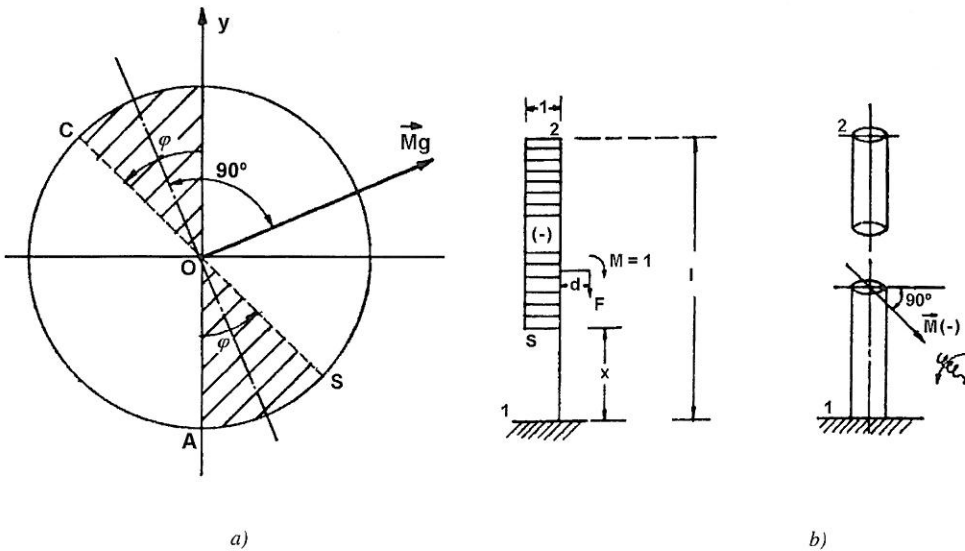


Fig.7.17 Linha de influência do momento na secção A de uma consola e áreas de carga

Variando φ entre 0 e 2π no 1º passo, e assim sucessivamente, no passo de ordem i o momento assume o valor

$$M_g = \frac{2}{3} gr^3 \text{sen} \left[\frac{\varphi}{2} - (i-1)\pi \right]$$

sendo i variável de 1 a n , em que n é o número de passos da hélice formada pelos degraus da escada e i a ordem do passo que contém a secção S.

Esta expressão dá os valores máximos de M_g para $\varphi = (2i-1)\pi$, nulos ($M_g = 0$) para $\varphi = 0$ e $\varphi = 2i\pi$ e intermédios,

$$M_g = \frac{2}{3} gr^3, \text{ para } \varphi = (2i-1)\pi; 2(i-1)\pi < \varphi \leq 2i\pi$$

Exemplo 7.1 - Diagrama dos momentos flectores actuantes no pilar central de uma escada em caracol, de quatro passos, encastrado na base, em dois casos:

a) início dos degraus da escada, ao nível da secção de encastramento do pilar na base;

b) início dos degraus na secção do pilar localizada à altura **b** da secção de encastramento do pilar na base.

Temos pois $n = 4$, passo de hélice a . Considerando o 1º passo ($i = 1$), e secções afastadas de $30^\circ = \frac{\pi}{6}$ radianos

$$M_g = \frac{2}{3} gr^3 \text{ sen } \varphi$$

Valores de k , inscritos nas Figs. 7,18 a) e b):

$\varphi = 0$	$\text{sen } \varphi = 0$	$M_g = 0,000 \text{ gr}^3$
$\varphi = \frac{\pi}{6}$	$\text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2}$	$M_g = 0,333$
$\varphi = \frac{\pi}{3}$	$\text{sen } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$M_g = 0,577$
$\varphi = \frac{\pi}{2}$	$\text{sen } 90^\circ = 1$	$M_g = 0,667$
$\varphi = \frac{2\pi}{3}$	$\text{sen } 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$M_g = 0,577$
$\varphi = \frac{5\pi}{6}$	$\text{sen } 150^\circ = \frac{1}{2}$	$M_g = 0,333$
$\varphi = \pi$	$\text{sen } 180^\circ = 0$	$M_g = 0,000$

e de modo indicado para os passos seguintes.

Assim, para $n = 4$ no 4º passo, $M_g = 0$ para $\varphi = 6\pi$ e 8π ,

$$M_g = \frac{2}{3} gr^3 \text{ para } \varphi = 7\pi.$$

Para $\varphi = 6\pi$, $x = 3a$, para $\varphi = 7\pi$, $x = 3,5a$ e para $\varphi = 8\pi$, $x = 4a$, em que a é o passo de hélice. Na parte inferior dos diagramas indicam-se os valores intermédios para secções afastadas de 30° . No que se refere à reacção R_1 do apoio 1, ela é vertical e igual ao peso total da escada. $R_1 = G$.

Daqui resulta que no pilar da escada em caracol de quatro passos, sob a acção duma carga permanente g , os diagramas de momentos flectores são os indicados na

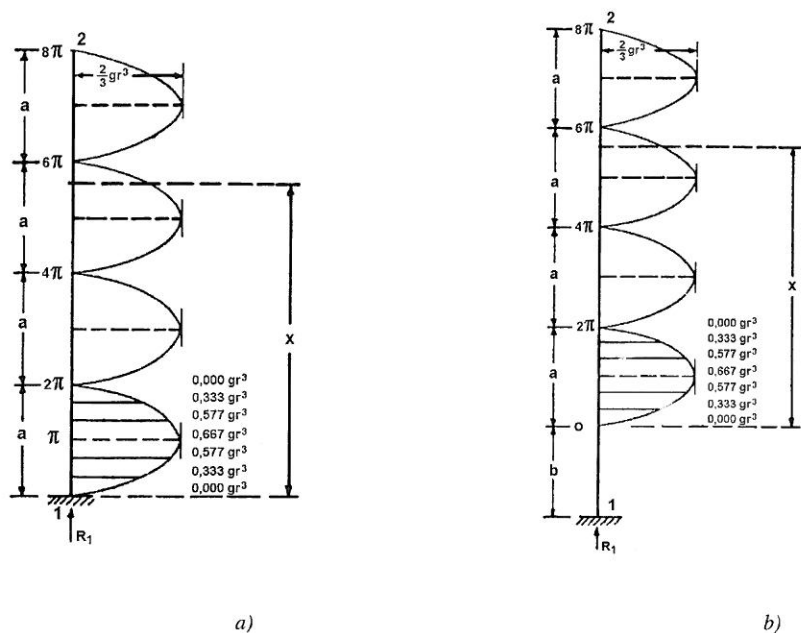


Fig.7.18 - Diagramas de momentos no pilar da escada em caracol sob a acção da carga permanente g.

Fig.7.18a). Os referidos diagramas repetem-se identicamente tantas vezes quantos os passos da escada; na fig.7.18b) supõe-se que o 1º degrau se insere no pilar a nível superior ao da secção de encastramento da base do pilar central.

7.3.2.2 - Actuação de sobrecargas, q

Considerando a actuação de uma sobrecarga variável q, a hipótese mais desfavorável corresponde à actuação de q simultaneamente ao longo de toda a escada. É evidente que esta sobrecarga produz maiores momentos quando se dispõe toda do mesmo lado cobrindo em todos os passos o semi-círculo SBCO, de acordo com a Fig. 7.19a).

Para a secção S no 1º passo, ocupando qualquer posição desde $\varphi = 0$ até $\varphi = \pi$, cobrindo a sobrecarga q os n passos na posição mais desfavorável; temos

$$\bar{M}_S = \frac{2}{3} n \quad qr^3$$

Para $\varphi > \pi$, mantendo-se S no 1º passo, parte da sobrecarga passa para o 2º passo, o que, de acordo com a Fig. 7.19, nos vai obrigar a considerar a composição de dois vectores de direcção perpendicular entre si:

$$\bar{M}'_S = \frac{2n}{3} qr^3 \sin \varphi \quad ; \quad \bar{M}''_S = \frac{2(n-1)}{3} qr^3 \cos \frac{\varphi}{2}$$



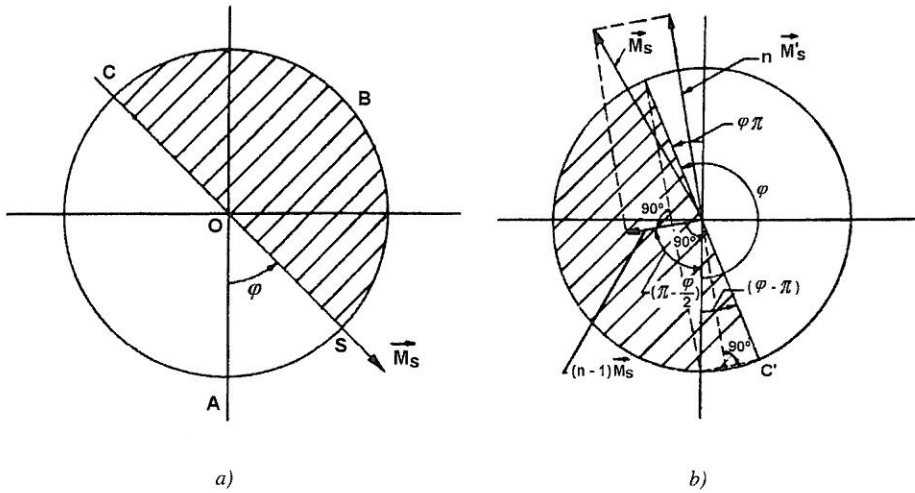


Fig. 7.19 - Sectores de aplicação da sobrecarga q que correspondem aos efeitos mais desfavoráveis no pilar em consola.

A linha de acção do vector resultante já não coincide com o raio SO e a sua grandeza é $M_s = n\vec{M}'_s + (n-1)\vec{M}''_s$

$$M_s = \frac{2}{3}qr^3 \sqrt{(n-1)^2 \cos^2 \varphi + n^2 \sin^2 \varphi} = \frac{2}{3}qr^3 \sqrt{n^2 + (1-2n)\cos^2 \frac{\varphi}{2}}$$

expressão que se reduz, para $\varphi = \pi$, a

$$M_s = \frac{2}{3}nqr^3 \text{ e para } \varphi = 2\pi \text{ se reduz a } M_s = \frac{2}{3}(n-1)qr^3.$$

Ao entrar a secção S no 2º passo repete-se a situação anterior, só que o número de sectores carregados diminui de uma unidade; para $2\pi \leq \varphi \leq 3\pi$ temos

$$M_s = \frac{2}{3}(n-1)qr^3$$

e assim sucessivamente. Para a secção S no passo de ordem i , e estando φ compreendido no intervalo $2(i-1)\pi \leq \varphi \leq (2i-1)\pi$,

$$M_s = \frac{2}{3} \left[(n - i + 1) \right] q r^3 \dots\dots\dots (1)$$

e para $(2i - 1)\pi \leq \varphi \leq 2i\pi$ temos

$$M_s = \frac{2}{3} q r^3 \times \sqrt{(n - i)^2 + \left[2(n - i) + 1 \right] \text{sen}^2 \frac{\varphi - 2(i - 1)\pi}{2}} \dots\dots (2)$$

em que i é variável de 1 a n , vidé exemplo 6.2.

Quanto à reacção horizontal na secção de encastramento o seu valor é sempre nulo porque a aplicação de momentos a uma consola não introduz reacções horizontais ($\Sigma H = 0$); a reacção vertical R_1 que corresponde a actuação do máximo M_s é:

$$R_1 = \frac{qA}{2}$$

sendo A a área total da escada em planta e q a sobrecarga variável. Além desta hipótese o valor máximo desta reacção que corresponde à acção de q em toda a área A é:

$$R_1 = qA$$

No caso da escada de quatro passos ($n = 4$) representados na Fig.7.20 temos, nessa mesma figura, os valores dos momentos determinados pelas expressões (1) e (2) respeitantes à actuação de sobrecarga q .

No caso da escada não ter um número inteiro de passos podem obter-se os momentos máximos por interpolação; assim, para uma escada com 3,5 passos podem considerar-se valores intermédios aos que correspondem às duas escadas, respectivamente com 3 e 4 passos.

Exemplo 7.2 - Diagrama dos momentos flectores actuantes no pilar central de uma escada de caracol de quatro passos de degraus, considerando os dois casos a) e b) referidos no exemplo 6.1.

Os cálculos efectuam-se de acordo com o quadro seguinte, a que correspondem os diagramas indicados na Fig. 7.20. A estes valores devem adicionar-se os que correspondem à actuação de acção permanente.



Passos i	Valores de φ	Valores de k, $M_s = k q r^3$
1	$0 \leq \varphi \leq \pi$	$\frac{8}{3} = 2,667$
	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{2}{3} \sqrt{9+7 \operatorname{sen}^2 60} = 2,517$
	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{2}{3} \sqrt{9+7 \operatorname{sen}^2 30} = 2,186$
	$\frac{6}{3}\pi$	$\frac{2}{3} \sqrt{9+7 \operatorname{sen}^2 0} = 2,000$
2	$2\pi \leq \varphi \leq 3\pi$	$\frac{6}{3} = 2,000$
	$\frac{10}{3}\pi$	$\frac{2}{3} \sqrt{4+5 \operatorname{sen}^2 60} = 1,856$
	$\frac{11}{3}\pi$	$\frac{2}{3} \sqrt{4+5 \operatorname{sen}^2 30} = 1,528$
	$\frac{12}{3}\pi$	$\frac{2}{3} \sqrt{4+5 \operatorname{sen}^2 0} = 1,333$
3	$4\pi \leq \varphi \leq 5\pi$	$\frac{4}{3} = 1,333$
	$\frac{16}{3}\pi$	$\frac{2}{3} \sqrt{1+3 \operatorname{sen}^2 60} = 1,202$
	$\frac{17}{3}\pi$	$\frac{2}{3} \sqrt{1+3 \operatorname{sen}^2 30} = 0,882$
	$\frac{18}{3}\pi$	$\frac{2}{3} \sqrt{1+3 \operatorname{sen}^2 0} = 0,667$
4	$5\pi \leq \varphi \leq 7\pi$	$\frac{2}{3} = 0,667$
	$\frac{22}{3}\pi$	$\frac{2}{3} \sqrt{0 \operatorname{sen}^2 60} = 0,577$
	$\frac{23}{3}\pi$	$\frac{2}{3} \sqrt{0 \operatorname{sen}^2 30} = 0,333$
	$\frac{24}{3}\pi$	$\frac{2}{3} \sqrt{0 \operatorname{sen}^2 0} = 0,000$

No que atrás referimos suposemos sempre que em todo o comprimento do pilar existem trechos de degraus; no entanto pode acontecer que a hélice formada pelos degraus só corresponda a uma parte do pilar. Tal sucede por exemplo quando a fundação deste esteja a uma determinada profundidade em relação ao nível do solo, onde a escada se inicia. Se o número de passos correspondentes for j, o problema reduz-se ao caso anterior considerando a sobrecarga actuando em n passos e a escada contendo (n + j) passos.

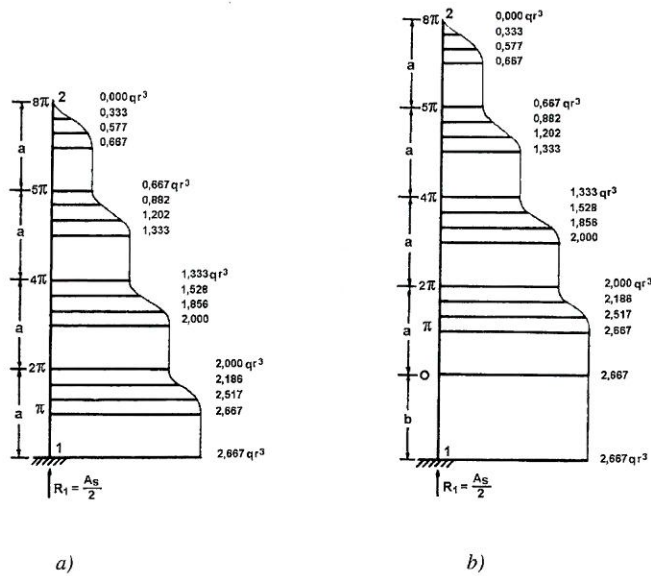


Fig.7.20 - Diagrama dos momentos resultantes da aplicação da sobrecarga q nas posições mais desfavoráveis, no caso do pilar em consola encastrado na base

No caso da carga permanente g não actuar nas secções abaixo do 1º degrau, os momentos são nulos, Fig.7.18b). No caso de não actuação da sobrecarga q, o momento nas secções onde não existe qualquer trecho de escada mantem o valor que tem na secção em que se insere o 1º degraus, Fig.7.20b).

7.3.3 - PILAR CENTRAL COM ARTICULAÇÕES NAS DUAS EXTREMIDADES

7.3.3.1 - Actuação da acção permanente, g

O problema é resolvido como no caso anterior, começando por admitir-se que a secção S pertence ao primeiro passo, Fig.7.21a), para acção da carga permanente g.

À acção no sector ASO, situado à esquerda de S, corresponde o momento

$$\vec{M}''_{g} = \frac{2}{3} gr^3 \left(1 - \frac{\varphi}{2\pi} \right) \text{sen} \frac{\varphi}{2}$$

atendendo à configuração da linha de influência, Fig.7.21b). A carga no sector BCO simétrico do anterior produz um momento com a mesma linha de acção e o mesmo sentido do anterior, e grandeza

$$\vec{M}''_{g} = \frac{2}{3} g r^3 \frac{\varphi}{2\pi} \text{sen} \frac{\varphi}{2}$$

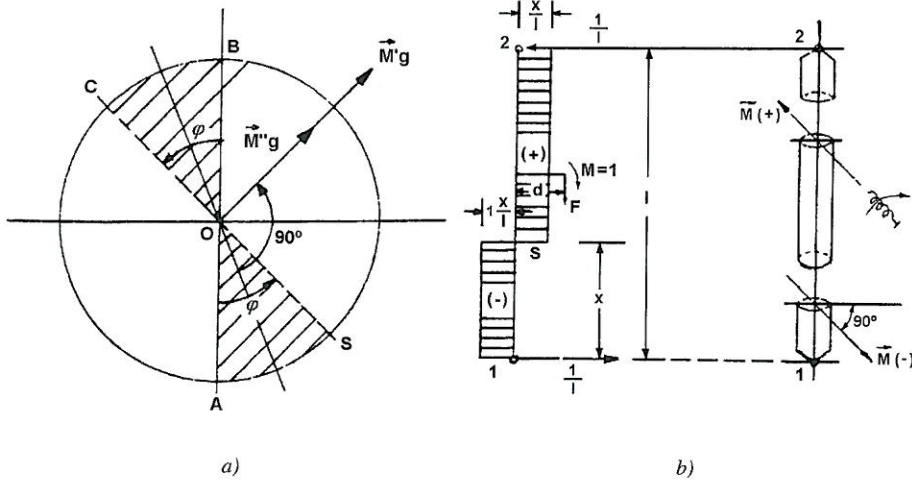


Fig.7.21 - Linha de influência do momento na secção S de uma barra articulada nas duas extremidades e áreas de carga.

Temos portanto, Fig.7.21a)

$$M_g = M'_g + M''_g = \frac{2}{3} gr^3 \operatorname{sen}\varphi \text{ de valor máximo } M_g = \frac{2}{3} gr^3$$

Se considerarmos agora uma secção S do 2º passo, temos no 1º passo dois sectores que se anulam e repete-se nesse 2º passo, e nos seguintes, a situação apresentada no 1º passo. Portanto tudo se passa como na escada com o pilar central em consola para a actuação da carga permanente g.

O diagrama dos momentos flectores ao longo do pilar central das escadas, quando apoiado nas duas extremidades, é apresentado nas Fig.7.18a) e 7.18b) correspondente á hipótese do pilar em consola.

7.3.3.2 - Actuação de sobrecargas

Para estudar a actuação da sobrecarga começamos por considerar a secção S no 1º

passo $M_q = M''_q = qr^3 \operatorname{sen}\varphi$ de valor máximo $M_q = \frac{2}{3} qr^3$, Fig.7.22; a hipótese mais

desfavorável verifica-se quando a sobrecarga q é uniformemente distribuída no sector helicoidal que vai desde a origem até à secção S (sector AOS, para aproveitar a parte positiva da linha de influência) e o meio círculo oposto com o mesmo eixo de simetria BCDO, Fig. 7.22. Tudo isto se passa no 1º passo e em todos os passos seguintes, a sobrecarga actua nos meios círculos B'C'D'O' cuja projecção é BCDO.

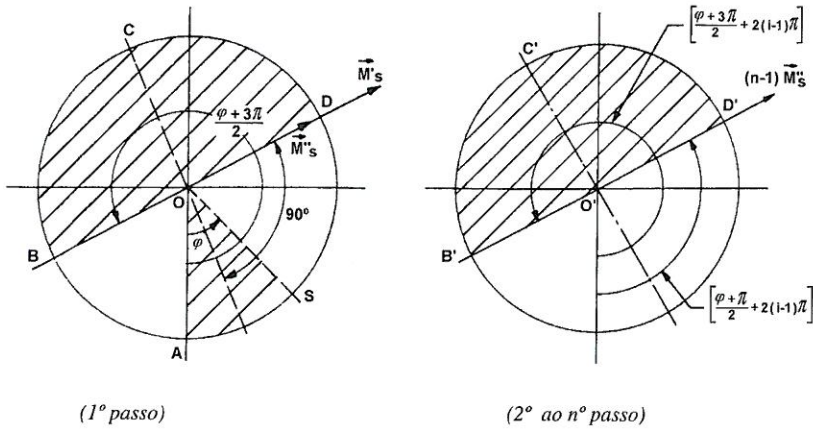


Fig. 7.22 - Posições mais desfavoráveis da sobreacrga na escada de n passos, para a secção S no 1º passo ($0 \leq \varphi \leq \pi$), e nos seguintes, no caso do pilar apoiado em articulações nos extremos.

Quer dizer, portanto, que a sobreacrga actua nos sectores difinidos por

$$0 \rightarrow \varphi ; \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{3\pi}{2}\right) ; \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{5\pi}{2}\right) \rightarrow \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{7\pi}{2}\right)$$

e, de um modo geral,

$$\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{4i-3}{2}\pi\right) \rightarrow \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{4i-1}{2}\pi\right)$$

sendo i variável de 1 a n.

No caso da escada corresponder ao comprimento total do pilar, num número inteiro de passos, atendendo a que:

$$\ell = na ; \left(1 - \frac{x}{na}\right) = 1 - \frac{\varphi}{2\pi n} ; \text{ e que } \frac{x}{na} = \frac{\varphi}{2\pi n} , \text{ vem:}$$

$$\bar{M}'_S = \frac{2}{3}qr^3\left(1 - \frac{\varphi}{2\pi n}\right) \text{sen} \frac{\varphi}{2} ; M''_S = \frac{2}{3}qr^3 \frac{\varphi}{2\pi n}$$

$$\bar{M}_S = M'_S + n M''_S = \frac{2}{3}qr^3 \left[\left(1 - \frac{\varphi}{2\pi n}\right) \text{sen} \frac{\varphi}{2} + \frac{\varphi}{2\pi} \right] \dots\dots\dots (3)$$

expressão válida para S no 1º passo, sendo, $0 \leq \varphi \leq \pi$.

Passando S ao 2º passo, a posição mais desfavorável da sobrecarga para $2\pi \leq \varphi \leq 3\pi$ deduz-se, como no caso anterior, a partir do diâmetro OA que define $\frac{\varphi}{2}$, considerando as limitações impostas pela origem e pelo final da escada. Temos, de acordo com a Fig. 7.23, tal posição é definida de seguinte modo: no 1º passo, a sobrecarga no intervalo $0 \rightarrow \left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{2}\right)$ a que correspondem dois vectores \vec{M}'_s (sector C'A'B'O') e \vec{M}''_s (sector A'C'O'), de sinal contrário ao anterior: $M'_s = \frac{2}{3}qr^3\left(1 - \frac{\varphi}{2\pi n}\right)$; $-\vec{M}''_s$ (a anular) como a seguir se indica e ainda a sobrecarga no intervalo $\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \varphi$, a que correspondem dois vectores \vec{M}'_s (sector CAO) que anula o anterior e \vec{M}'''_s (sector AOS)

$$M'''_s = \frac{2}{3}qr^3\left(1 - \frac{\varphi}{2\pi n}\right) \text{sen}\left(\frac{\varphi}{2} - \pi\right)$$

Passando ao 2º passo e seguintes, com a sobrecarga no intervalo

$$\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{3}{2}\pi\right) \rightarrow \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{5}{2}\pi\right) \text{ do } 2.^\circ \text{ passo}$$

e de um modo geral, no passo de ordem i, no intervalo

$$\left[\frac{\varphi}{2} + \frac{4i-5}{2}\pi\right] \rightarrow \left[\frac{\varphi}{2} + \frac{4i-3}{2}\pi\right],$$

variando i de 2 a n, e a que correspondem (n-1) vectores \vec{M}_s^{IV} (sectores B"D"C"O")

Temos portanto

$$M_s = M'_s + M''_s + (n-1)M_s^{IV} = \frac{2}{3}qr^3 \times \left[1 + \frac{n-2}{2\pi n}\varphi + \left(1 - \frac{\varphi}{2\pi n}\right) \text{sen}\left(\frac{\varphi}{2} - \pi\right)\right] \dots\dots (4)$$

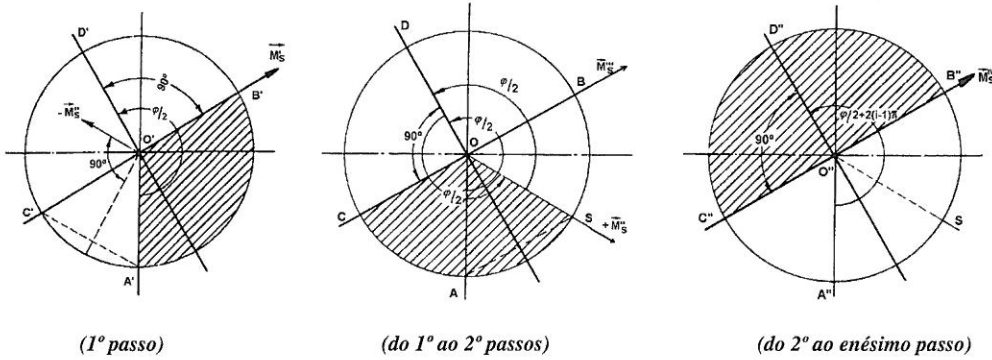


Fig.7.23 - Posições mais desfavoráveis da sobrecarga da escada de n passos, em relação à secção S do 2.º passo, no caso do pilar apoiado em articulações nos extremos

Esta expressão é válida para S no 2º passo, sendo $2\pi \leq \varphi \leq 3\pi$. Na hipótese de S passar aos passos seguintes até ao de ordem i, temos (i - 1) vectores \vec{M}'_S um vector \vec{M}'''_S , e (n - i + 1) vectores \vec{M}^{IV}_S . Vem

$$M_S = \frac{2}{3}qr^3 \left\{ (i-1) + (n-2i+2) \frac{\varphi}{2\pi n} + \left(1 - \frac{\varphi}{2\pi n} \right) \text{sen} \left[\frac{\varphi}{2} (i-1)\pi \right] \right\} \dots\dots\dots (5)$$

sendo i variável de 2 a (n-1) englobando portanto a expressão (4) para i = 2. Esta expressão é válida para S no passo de ordem i na posição $2(i-1)\pi \leq \varphi \leq (2i-1)\pi$, não sendo válida para S nos 1º e último passos; em relação a este último caso há que considerar (n-1) vectores \vec{M}'_S , um \vec{M}'''_S e outro \vec{M}^{IV}_S .

Temos

$$M_S = \frac{2}{3}qr^3 \left\{ (n-1) - \frac{(n-2)\varphi}{2\pi n} + \left(1 - \frac{\varphi}{2\pi n} \right) \times \text{sen} \left[\frac{\varphi}{2} - (n-1)\pi \right] \right\} \dots\dots\dots (6)$$

Tendo finalmente em conta a hipótese de S ocupar a segunda metade do círculo, ou seja, para o 1º passo $\varphi \geq \pi$ a hipótese mais desfavorável corresponde a q ocupar a posição indicada na Fig.7.24, ou seja semi-círculo BCDO definido por

$$\varphi_1 = \frac{\varphi - \pi}{2}; \quad \varphi_2 = \frac{\varphi + \pi}{2}$$



cujo eixo de simetria coincide com a bissetriz do ângulo φ , e a que corresponde o momento \bar{M}'_S . Acima da secção, e ainda no 1º passo, a sobrecarga no sector S'E'B'O' (sem ultrapassar B', a partir do qual passaria a ser de sinal contrário), definido por

$$\varphi_1 = \varphi; \quad \varphi_2 = \frac{\varphi + 3\pi}{2}$$

ao qual correspondem dois vectores \bar{M}''_S (com a linha de acção de M'_S) e \bar{M}'''_S formando com o anterior o ângulo $\frac{3\pi - \varphi}{4}$.

Passando a sobrecarga q ao 2º passo e seguintes, até o penúltimo ocupará o semi-circulo B''A''E''D'' definido por $\varphi_1 = \frac{\varphi + 5\pi}{2}$, ou de um modo geral $\varphi_1 = \frac{\varphi + (4i - 3)\pi}{2}$ e $\varphi_2 = \frac{\varphi + 7\pi}{2}$, ou de um modo geral $\varphi_2 = \frac{\varphi + (4i - 1)\pi}{2}$; existem portanto $(n-2)$ vectores \bar{M}^{IV}_S cuja linha de acção coincide com a de \bar{M}_S .

No último passo a sobrecarga q existe no sector S''E''A''O'', definido por

$$\varphi_1 = \frac{\varphi + (4n - 3)\pi}{2}; \quad \varphi_2 = 2n\pi,$$

equivalente a um vector M''_S e outro M'''_S que anula o primeiro.

Em resumo, a sobrecarga na posição mais desfavorável ocupa os sectores

$$\left(\frac{\varphi - \pi}{2}\right) \rightarrow \left(\frac{\varphi + \pi}{2}\right); \quad \varphi \rightarrow \left(\frac{\varphi + 3\pi}{2}\right); \quad \left(\frac{\varphi + 5\pi}{2}\right) \rightarrow \left(\frac{\varphi + 7\pi}{2}\right);$$

$$\left[\frac{\varphi + 4i - 3}{2}\pi\right] \rightarrow \left[\frac{\varphi + 4i - 1}{2}\pi\right] \quad \dots \dots \dots \left[\frac{\varphi + 4n - 3}{2}\pi\right] \varphi \rightarrow 2n\pi.$$

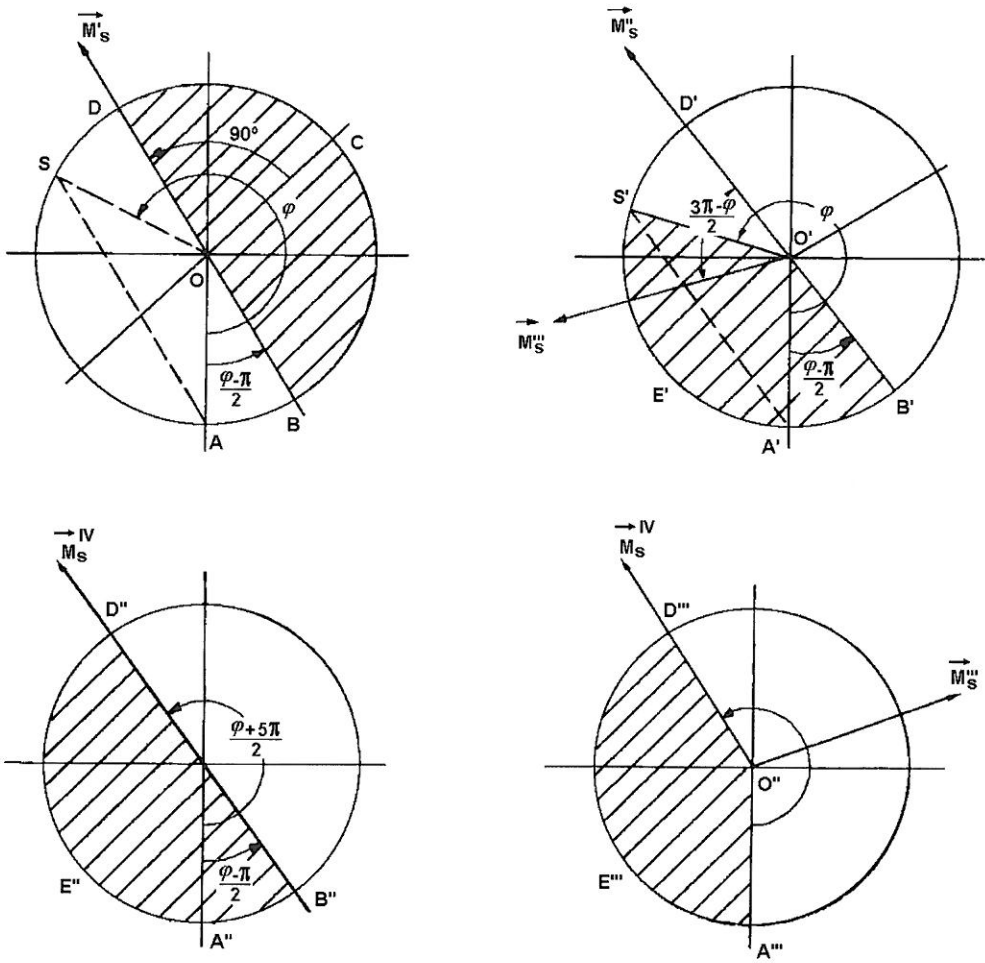


Fig.7.24 - Posições mais desfavoráveis da sobrecarga na escada de n passos em relação à secção S do 1º passo, no caso do pilar apoiado com articulação nos extremos.

A grandeza do momento resultante é

$$M_s = M'_s + M''_s + (n - 1)M_s^{IV} = \frac{2}{3}qr^3 \times \left[1 + \frac{n-2}{2n}\varphi + \frac{\varphi}{2n\pi} \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} \right] \dots\dots\dots (7)$$

expressão válida para S no 1º passo sendo $\pi \leq \varphi \leq 2\pi$

Passando a secção S ao 2º passo, a observação da Fig.7.24 permite-nos concluir que existem dois vectores \vec{M}'_S , um vector \vec{M}''_S e (n-2) vectores \vec{M}^{iv}_S . De um modo geral, quando S pertence ao passo de ordem i existem i valores \vec{M}'_S , um vector \vec{M}''_S e (n - 1) vectores \vec{M}^{iv}_S . O momento resultante M_S é:

$$M_S = \frac{2}{3}qr^3 \left\{ i + \frac{n-2i}{2n\pi} \varphi + \frac{\varphi}{2n\pi} \times \text{sen} \left[\frac{\varphi}{2} - (i-1)\pi \right] \right\} \dots\dots (8)$$

que se reduz à expressão (7) para i = 1. Esta expressão é válida para S em qualquer passo de ordem i excepto o último, para o qual só existem n vectores \vec{M}_S e um \vec{M}''_S .
É então:

$$M_S = \frac{2}{3}qr^3 \left\{ n \left(1 - \frac{\varphi}{2n\pi} \right) + \frac{\varphi}{2n\pi} \times \text{sen} \left[\frac{\varphi}{2} - (n-1)\pi \right] \right\} \dots\dots (9)$$

No que se refere à componente horizontal das reacções de apoio sendo, para a aplicação do momento $\vec{M} = 1$ em qualquer secção

$$H_1 = -H_2 = \frac{1}{\ell}$$

resultando que, para a actuação do peso próprio ou de uma sobrecarga distribuída completa, $H = 0$. O valor máximo de H corresponde à sobrecarga nos n meios círculos de igual projecção horizontal, donde

$$H = H_1 = H_2 = \frac{2}{3l}q n r^3$$

Esta reacção pode actuar em qualquer direcção à medida que consideramos semi-círculos cuja orientação varia de φ ; por esta razão os apoios 1 e 2 devem poder resistir àquele valor de H em todas as direcções.

Em relação à reacção vertical temos que distinguir dois casos extremos: os casos a) e b) apresentados a seguir.



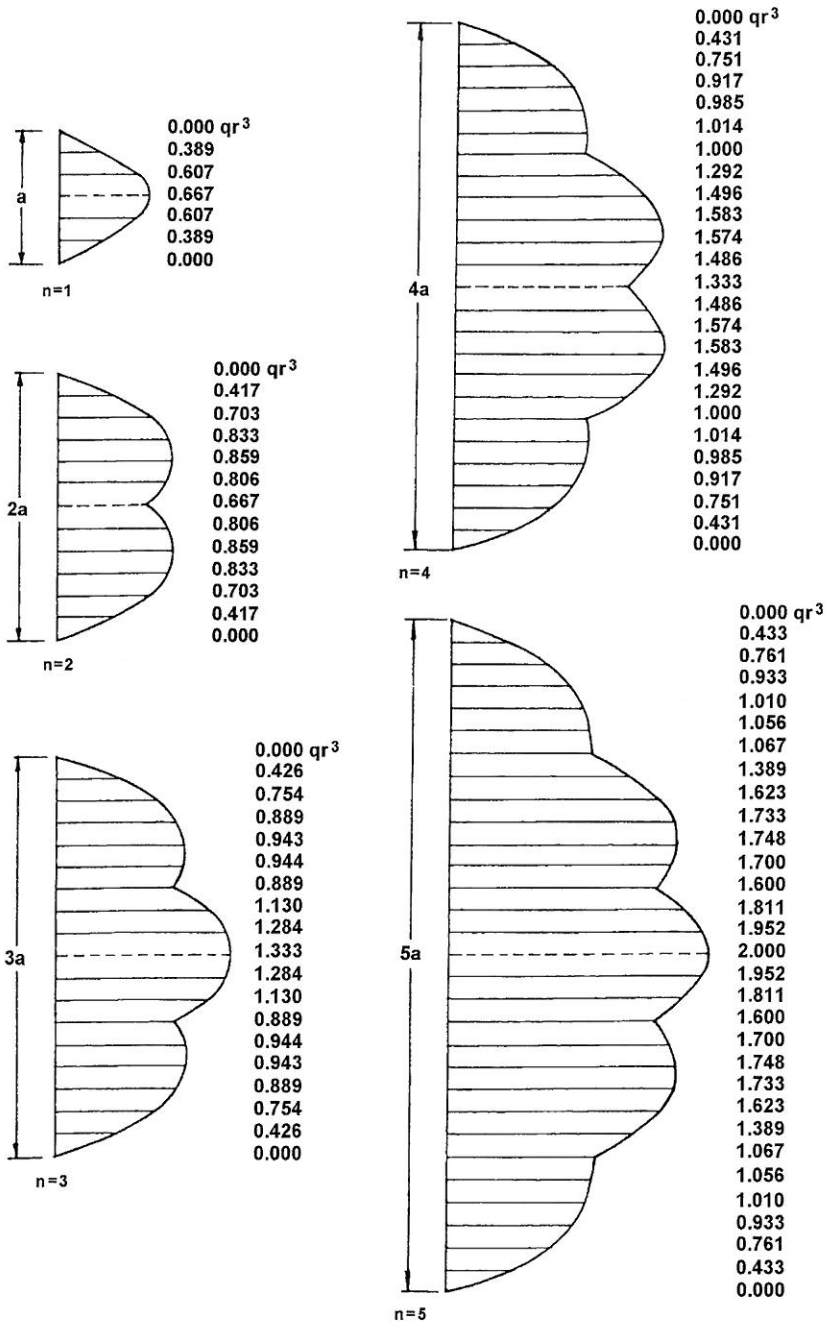


Fig.7.25 - Diagramas correspondentes à actuação da sobrecarga variável q , dos momentos flectores máximos na secção do pilar central das escadas com n passos, sendo os pilares articulados nas secções correspondem ao 1º e último degraus. Para a actuação de g são válidos os diagramas indicados na Fig.7.18.

a) O apoio superior 2 (superior), tem movimentos restringidos na direcção horizontal mas funciona como um apoio com escorregamento no sentido vertical, por falta de rigidez nesse sentido. Então

$$V_1 = G + Aq; \quad V_2 = 0$$

como no caso do pilar em consola, em que G é o peso total da escada e q a sobrecarga considerada na pior hipótese, isto é, para este caso, cobrindo toda a escada. Em casos pouco frequentes (escada pendurada) pode verificar-se o contrário, isto é

$$V_1 = 0; \quad V_2 = G + Q \quad \text{em que } Q = Aq$$

b) O apoio 2 tem condições para resistir aos movimentos horizontais (reação V_2) e a sua rigidez é semelhante à do apoio 1. Nesse caso

$$V_1 = V_2 = \frac{G + Q}{2}$$

De acordo com o formulário apresentado podemos determinar os diagramas dos momentos flectores máximos no pilar da escada de caracol devidos à sobrecarga q ocupando as posições mais desfavoráveis. Obtemos os valores indicados na Fig.7.25 para escadas com degraus correspondentes a n passos, coincidindo o 1º e o último degraus com as duas extremidades 1 e 2 articuladas do pilar.

Exemplo 7.3 - Diagrama dos momentos flectores no pilar central de uma escada em caracol apoiado nas extremidades, considerando a actuação da sobrecarga q , no caso do desenvolvimento dos degraus correspondem aos casos: $n = 1; 2; 3$ ou 4 passos de hélice.

No caso de um só passo fazemos na expressão (3) $\varphi = 0; \frac{2\pi}{3}; \frac{3\pi}{3}; \frac{4\pi}{3};$

$\frac{5\pi}{3}$ e $\frac{6\pi}{3}$ de acordo com os calculos indicados no quadro seguinte:

Ordenadas do diagrama para a escada de um passo

Passos i	Valores de φ	Valores de k, $M_s = k s r^3$
1	0	$\frac{2}{3} \left[\left(1 - \frac{0}{6} \right) 0,00000 + \frac{0}{6} \right] = 0,000$
	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2}{3} \left[\left(1 - \frac{1}{6} \right) 0,50000 + \frac{1}{6} \right] = 0,389$
	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{2}{3} \left[\left(1 - \frac{2}{6} \right) 0,86603 + \frac{2}{6} \right] = 0,607$
	$\frac{3\pi}{3}$	$\frac{2}{3} \left[\left(1 - \frac{3}{6} \right) 1,00000 + \frac{3}{6} \right] = 0,667$
	$\frac{3\pi}{3}$	$\frac{2}{3} \left[\left(1 - \frac{3}{6} \right) + \frac{3}{6} 1,00000 \right] = 0,667$
	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{2}{3} \left[\left(1 - \frac{4}{6} \right) + \frac{4}{6} 0,86603 \right] = 0,607$
	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{2}{3} \left[\left(1 - \frac{5}{6} \right) + \frac{5}{6} 0,50000 \right] = 0,389$
	$\frac{6\pi}{3}$	$\frac{2}{3} \left[\left(1 - \frac{6}{6} \right) + \frac{6}{6} 0,00000 \right] = 0,000$

No caso da escada de cinco passos, (n = 5) o desenvolvimento dos cálculos está apresentado no quadro que se segue, que conduz ao diagrama indicado na Fig. 7.25.

Há que referir a hipótese das secções dos apoios do pilar da escada não corresponderem às inserções do 1.º e do último degrau.

Como foi referido atrás temos neste caso que considerar separadamente as secções do pilar a que correspondem degraus e as restantes secções, mas como a variação dos momentos nestas últimas é linear, pode simplificar-se o cálculo.

No caso do pilar de comprimento 2a com degraus só no passo superior, apresenta-se na Fig. 7.26 o diagrama de momentos.

Neste caso, para $2\pi \leq \varphi \leq 3\pi$ vem Fig. 7.22

$$M_s = M'_s + M''_s = \frac{2}{3} q r^3 \times \left[\left(1 - \frac{\varphi}{4\pi} \right) \text{sen} \left(\frac{\varphi}{2} - \pi \right) + \frac{\varphi}{4\pi} \right]$$

Ordenadas do diagrama para a escada de cinco passos

Passos i	Valores de φ	Valores de $k, M_s = k s r^3$
1	0	$\frac{2}{3} \left[\left(1 - \frac{0}{30}\right) 0,00000 + \frac{0}{6} \right] = 0,000$
	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2}{3} \left[\left(1 - \frac{1}{30}\right) 0,50000 + \frac{1}{6} \right] = 0,433$
	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{2}{3} \left[\left(1 - \frac{2}{30}\right) 0,86603 + \frac{2}{6} \right] = 0,761$
	$\frac{3\pi}{3}$	$\frac{2}{3} \left[\left(1 - \frac{3}{30}\right) 1,00000 + \frac{3}{6} \right] = 0,933$
	$\frac{3\pi}{3}$	$\frac{2}{3} \left[1 + \frac{3}{10} + \frac{3}{30} 1,00000 \right] = 0,933$
	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{2}{3} \left[1 + \frac{4}{10} + \frac{4}{30} 0,86603 \right] = 1,010$
	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{2}{3} \left[1 + \frac{5}{10} + \frac{5}{30} 0,50000 \right] = 1,056$
	$\frac{6\pi}{3}$	$\frac{2}{3} \left[1 + \frac{6}{10} + \frac{6}{30} 0,00000 \right] = 1,067$
2	$\frac{6\pi}{3}$	$\frac{2}{3} \left[1 - \frac{6}{10} \left(1 - \frac{6}{30}\right) 0,00000 \right] = 1,067$
	$\frac{7\pi}{3}$	$\frac{2}{3} \left[1 + \frac{7}{10} \left(1 - \frac{7}{30}\right) 0,50000 \right] = 1,389$
	$\frac{8\pi}{3}$	$\frac{2}{3} \left[1 + \frac{8}{10} \left(1 - \frac{8}{30}\right) 0,86603 \right] = 1,623$
	$\frac{9\pi}{3}$	$\frac{2}{3} \left[1 + \frac{9}{10} \left(1 - \frac{9}{30}\right) 1,00000 \right] = 1,733$
	$\frac{9\pi}{3}$	$\frac{2}{3} \left[2 + \frac{9}{30} + \frac{9}{30} 1,00000 \right] = 1,733$
	$\frac{10\pi}{3}$	$\frac{2}{3} \left[2 + \frac{10}{30} + \frac{10}{30} 0,86603 \right] = 1,733$
	$\frac{11\pi}{3}$	$\frac{2}{3} \left[2 + \frac{11}{30} + \frac{11}{30} 0,50000 \right] = 1,700$
	$\frac{12\pi}{3}$	$\frac{2}{3} \left[2 + \frac{12}{30} + \frac{12}{30} 0,00000 \right] = 1,600$

Ordenadas do diagrama para a escada de cinco passos (Continuação)

Passos i	Valores de φ	Valores de k, $M_s = k s r^3$
3	$\frac{12\pi}{3}$	$\frac{2}{3} \left[2 + \frac{12}{30} + \left(1 - \frac{12}{30} \right) 0,000000 \right] = 1,600$
	$\frac{13\pi}{3}$	$\frac{2}{3} \left[2 + \frac{13}{30} + \left(1 - \frac{13}{30} \right) 0,500000 \right] = 1,811$
	$\frac{14\pi}{3}$	$\frac{2}{3} \left[2 + \frac{14}{30} + \left(1 - \frac{14}{30} \right) 0,86603 \right] = 1,952$
	$\frac{15\pi}{3}$	$\frac{2}{3} \left[2 + \frac{15}{30} + \left(1 - \frac{15}{30} \right) 1,00000 \right] = 2,000$
	$\frac{15\pi}{3}$	$\frac{2}{3} \left[3 - \frac{15}{30} + \frac{15}{30} 1,00000 \right] = 2,000$
	$\frac{16\pi}{3}$	$\frac{2}{3} \left[3 - \frac{16}{30} + \frac{16}{30} 0,86603 \right] = 1,952$
	$\frac{17\pi}{3}$	$\frac{2}{3} \left[3 - \frac{17}{30} + \frac{17}{30} 0,50000 \right] = 1,811$
	$\frac{18\pi}{3}$	$\frac{2}{3} \left[3 - \frac{18}{30} + \frac{18}{30} 0,00000 \right] = 1,600$
4	$\frac{18\pi}{3}$	$\frac{2}{3} \left[3 - \frac{18}{30} + \left(1 - \frac{18}{30} \right) 0,00000 \right] = 1,600$
	$\frac{19\pi}{3}$	$\frac{2}{3} \left[3 - \frac{19}{30} + \left(1 - \frac{19}{30} \right) 0,50000 \right] = 1,700$
	$\frac{20\pi}{3}$	$\frac{2}{3} \left[3 - \frac{20}{30} + \left(1 - \frac{20}{30} \right) 0,86603 \right] = 1,748$
	$\frac{21\pi}{3}$	$\frac{2}{3} \left[3 - \frac{21}{30} + \left(1 - \frac{21}{30} \right) 1,00000 \right] = 1,733$
	$\frac{21\pi}{3}$	$\frac{2}{3} \left[4 - \frac{21}{30} + \frac{21}{30} 1,00000 \right] = 1,733$
	$\frac{22\pi}{3}$	$\frac{2}{3} \left[4 - \frac{22}{30} + \frac{22}{30} 0,86603 \right] = 1,623$
	$\frac{23\pi}{3}$	$\frac{2}{3} \left[4 - \frac{23}{30} + \frac{23}{30} 0,50000 \right] = 1,389$
	$\frac{24\pi}{3}$	$\frac{2}{3} \left[4 - \frac{24}{30} + \frac{24}{30} 0,00000 \right] = 1,067$



Ordenadas do diagrama para a escada de cinco passos (Continuação)

Passos i	Valores de φ	Valores de k, $M_s = k s r^3$
5	$\frac{24\pi}{3}$	$\frac{2}{3} \left[4 \cdot \frac{24}{30} + \left(1 - \frac{24}{30} \right) 0,00000 \right] = 1,067$
	$\frac{25\pi}{3}$	$\frac{2}{3} \left[4 \cdot \frac{25}{30} + \left(1 - \frac{25}{30} \right) 0,50000 \right] = 1,056$
	$\frac{26\pi}{3}$	$\frac{2}{3} \left[4 \cdot \frac{26}{30} + \left(1 - \frac{26}{30} \right) 0,86603 \right] = 1,019$
	$\frac{27\pi}{3}$	$\frac{2}{3} \left[4 \cdot \frac{27}{30} + \left(1 - \frac{27}{30} \right) 1,00000 \right] = 0,933$
	$\frac{27\pi}{3}$	$\frac{2}{3} \left[5 \left(1 - \frac{27}{30} \right) 1,00000 \right] = 0,933$
	$\frac{28\pi}{3}$	$\frac{2}{3} \left[5 \left(1 - \frac{28}{30} \right) 0,86603 \right] = 0,761$
	$\frac{29\pi}{3}$	$\frac{2}{3} \left[5 \left(1 - \frac{29}{30} \right) 0,50000 \right] = 0,433$
	$\frac{30\pi}{3}$	$\frac{2}{3} \left[5 \left(1 - \frac{30}{30} \right) 0,00000 \right] = 0,000$

Para $3\pi \leq \varphi \leq 4\pi$ vem

$$M_s = \frac{2}{3} q r^3 \left[\left(1 - \frac{\varphi}{6\pi} \right) + \frac{\varphi}{6\pi} \operatorname{sen} \left(\frac{\varphi}{2} - \pi \right) \right]$$

No caso da mesma escada com pilar de três passos de altura e com degraus apenas no passo médio, Fig. 7.27, atendemos à variação linear do diagrama para $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ e para $4\pi \leq \varphi \leq 6\pi$, desde que calculadas as ordenadas extremas do intervalo $2\pi \leq \varphi \leq 4\pi$ podem deduzir-se os valores de M_s nas zonas rectilíneas do diagrama, a partir dos valores que correspondem a essas ordenadas extremas $\varphi = 2\pi$ e $\varphi = 4\pi$.

O problema equivale portanto ao de uma escada de três passos com a sobrecarga só no 2.º passo.

Para $2\pi \leq \varphi \leq 3\pi$

$$M_s = \frac{2}{3} q r^3 \left[\left(1 - \frac{\varphi}{6\pi} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{\varphi}{2} - \pi \right) + \frac{\varphi}{6\pi} \right]$$

Para $3\pi \leq \varphi \leq 4\pi$

$$M_s = \frac{2}{3} qr^3 \left[\left(1 - \frac{\varphi}{6\pi} \right) + \frac{\varphi}{6\pi} \operatorname{sen} \left(\frac{\varphi}{2} - \pi \right) \right]$$

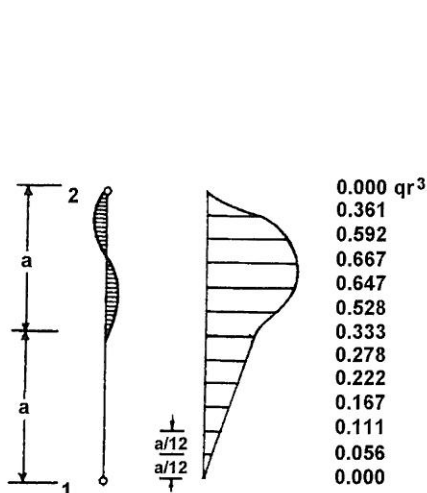


Fig.7.26 - Diagrama dos momentos máximos na escada de um só passo, com o pilar prolongado de um passo (do 1º degrau à fundação) e articulado na base e na secção correspondente ao último degrau.

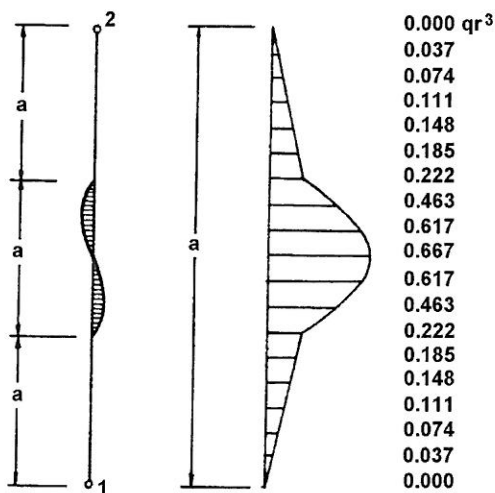


Fig.7.27 - Diagrama dos momentos máximos na escada de um só passo, com o pilar prolongado de um passo do 1º degrau à fundação e de outro passo do último degrau à extremidade do apoio superior.

7.4 - EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

Exemplo 7.4 - Escada em caracol de acordo com a Fig. 7.28, de acesso a um depósito de água, nas condições a seguir indicadas; o elemento helicoidal é simplesmente apoiado nas paredes da chaminé central do depósito através da interposição de cartão betuminoso entre as superfícies de contacto, afim de possibilitar a dilatação da escada nos sentidos vertical e transversal .

- Altura do pilar central 20,00 m
- Diâmetro do pilar 0,30 m
- Largura livre dos degraus 0,73 m
- Passo da hélice a = 2,70 m
- Nº de passos n = 20/2,7 = 7,5
- Diâmetro interior da guarda 1,76 m
- Diâmetro médio da guarda 1,84 m



Diâmetro exterior da guarda	1,92 m
Diâmetro interior dos degraus	0,30 m
Diâmetro médio dos degraus	1,03 m
Diâmetro exterior dos degraus	1,76 m
Altura de cada degrau	0,18 m
Nº de degraus por passo	$n' = 270/18 = 15$
Nº de cobertores por passo	$n'' = 15 - 1 = 14$

A escada é constituída por uma laje helicoidal de 0,05m de espessura, que se encastra no pilar central, formando uma cintagem deste; os degraus pousam na laje helicoidal, sendo executados simultaneamente com esta laje, pelo que cada degrau, incluindo o trecho da laje na qual se apoia, é considerado como elemento resistente à flexão radial e encastrado no pilar central. A guarda é de betão armado de espessura 0,08m (betão desmoldado) e acompanha a escada desde o nível do terreno até à sua inserção na chaminé do reservatório, senda a sua altura de 0,85m, incluindo a espessura da laje.

Para efeitos de dimensionamento, a escada pode ser considerada como constituída por um trecho inicial correspondente a 4,5 passos apoiado nas extremidades; por um trecho intermédio com apoio contínuo, correspondente a dois passos e, finalmente, por um trecho em consola, de um só passo.

Devido à natureza do problema não é verosímil uma actuação muito significativa da sobrecarga no trecho apoiado inicial, mas é de considerar uma hipótese desfavorável de actuação da sobrecarga no trecho em consola pelo qual a escada termina. Aliás, por se tratar de um só passo nestas condições, não resultam daqui grandes esforços.

a) Características geométricas dos diversos elementos;

Este cálculo tem em vista a obtenção dos valores numéricos que intervêm na determinação das dimensões lineares e secções dos degraus, e do peso de cada um destes e de toda a escada.

Sendo d o diâmetro do pilar e d' o diâmetro da guarda, as dimensões em planta dos degraus, conforme Fig.7.29, são respectivamente: 6,7 cm na ligação ao pilar, segundo o arco ou a corda, e 39,5 cm (no extremo livre segundo o arco) ou 39,2 cm (segundo a corda), uma vez que existem 14 cobertores de degraus por passo.

Sendo e a espessura constante da laje, cada degrau pode ser definido como um prismatóide de 0,73 m de altura (largura do degrau), através das secções de encastramento, média e do extremo livre, que são trapézios paralelos entre si, fig.30, de altura constante $h = 18$ cm.

$$b_s = \frac{\pi d}{14} + \frac{e}{\sin \alpha}; \quad b_i = \frac{e}{\sin \alpha}$$

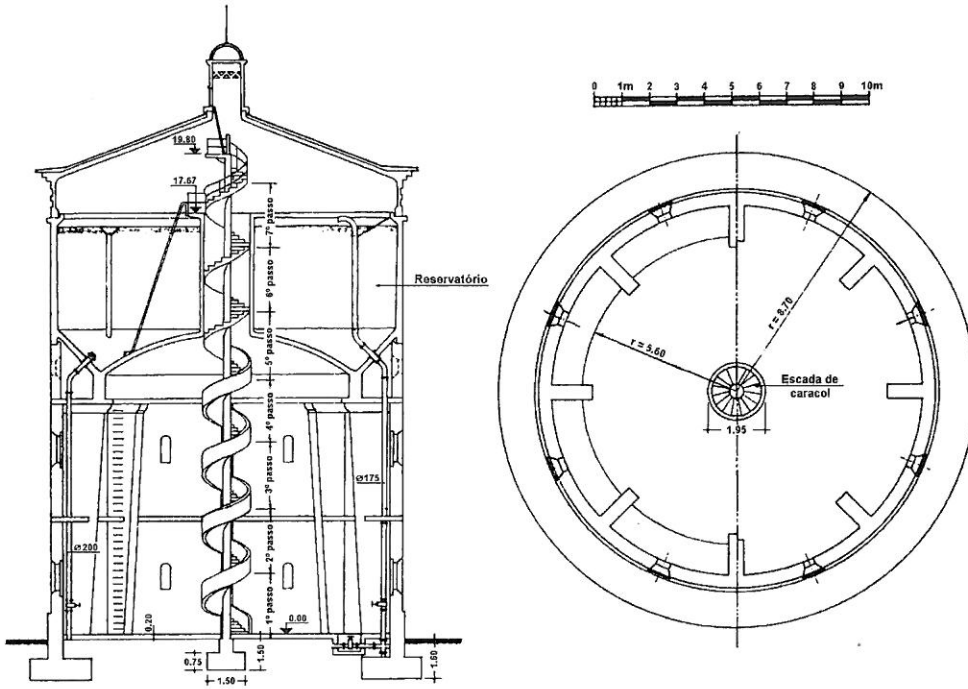


Fig.7.28 - exemplo 7.4 - Escada em caracol para acesso a um depósito de água elevado.

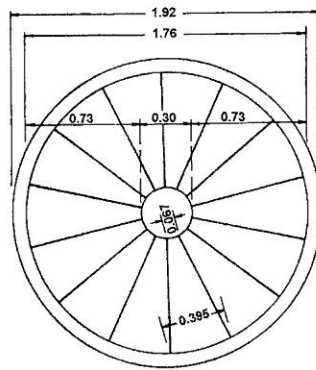


Fig.7.29 - Planta da escada com degraus correspondentes a um passo (15 degraus, 14 cobertores)

Características geométricas dos elementos da escada do exemplo 7.4

Elementos	d	dπ	Arco dπ / 14	Corda d sen β 12°, 8569	tg β	sen β	e/sen β
pilar	0,30	0,942	0,067	0,067	2,866	0,944	0,053
degraus (médio)	1,03	3,236	0,231	-----	0,834	0,64	0,078
guarda (interior)	1,76	5,529	0,395	0,392	0,488	0,439	0,114
guarda (médio)	1,84	5,781	-----	-----	-----	-----	-----
guarda (exterior)	1,92	6,032	0,435	0,428	-----	-----	-----

atendendo à figura 30 b) e c) e determinado sen α pela expressão

$$\text{sen}\beta = \frac{\text{tg}\beta}{\sqrt{1 + \text{tg}^2\beta}} \quad ; \quad V = \frac{0,73}{6} (A_b + A'_b + 4A_m)$$

$$A_b = \frac{0,053 + (0,067 + 0,053)}{2} \times 0,18 = 0,0865 \times 0,18 \text{ m}^2$$

e, de modo idêntico, Fig.7.30:

$$A_b = 0,3115 \times 0,18 \text{ m}^2 \quad ; \quad A_m = 0,1935 \times 0,18 \text{ m}^2$$

Volume V de betão por degrau

$$V = \frac{0,73}{6} \times 0,18(0,0865 + 0,3115 + 0,1935 \times 4) = 0,0257 \text{ m}^3$$

b) Acções da escada

A carga permanente devida ao peso de um degrau é (0,025 x 25=0,65kN) e está distribuída na área A = 0,163 m² do degrau.

$$g = \frac{25 V}{A} = \frac{0,0257 \times 25 \times 2}{(0,395 + 0,067) \times 0,73} = 3,80 \text{ kN / m}^2$$

LAJES E ESCADAS DE BETÃO ARMADO

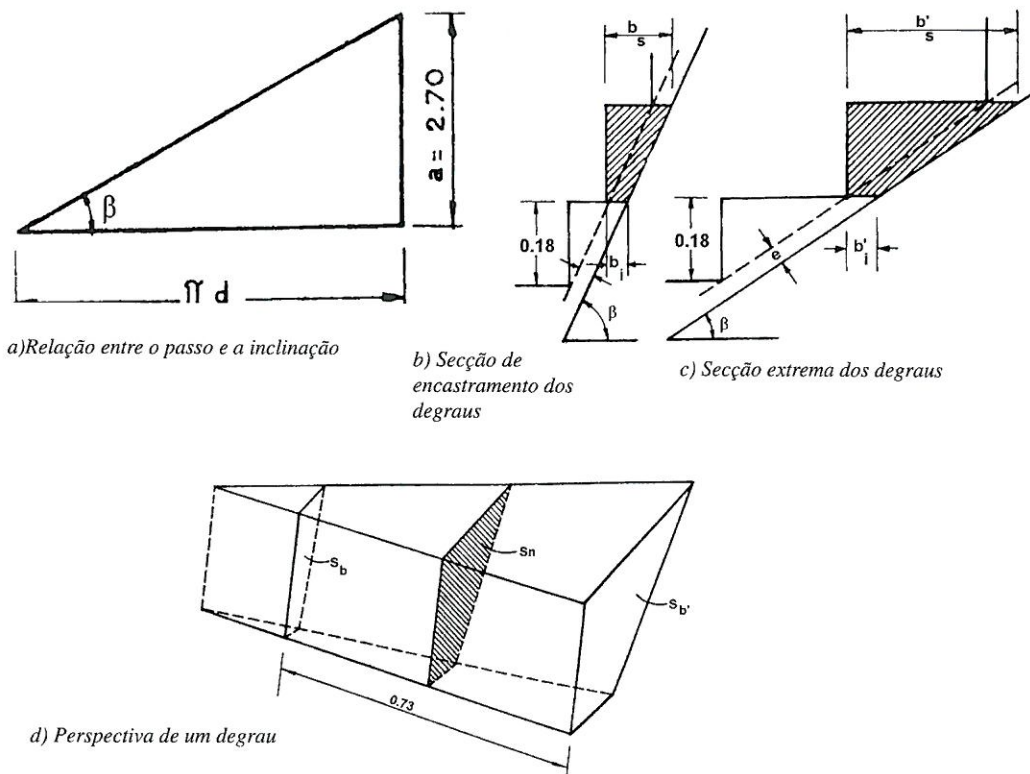


Fig. 7.30 - Individualização de um degrau pelas três secções: de apoio no pilar, média e livre

e a sobrecarga variável q num degrau é

$$q = 3,0 \times \frac{0,395 + 0,067}{2} \times 0,73 = 0,506 \text{ kN}$$

Pilar (0,0707x20x25)	35,5kN
guarda (0,08x0,85x7,5x5,78x25)	74,0kN
degraus (0,0257x25x15x7,5)	72,3 kN
fundação (0,50x0,50x0,75x25=4,7)	
(1,50x1,50x0,75x25=42,2)	46,9 kN
arredondamento	1,3 kN
	230,0 kN

c) Momento flector e armaduras num degrau

Cada degrau, considerado isoladamente, é suposto equivalente a uma consola de secção rectangular solicitada à flexão simples, encastrada no pilar, e sob a acção das

cargas verticais aplicadas, peso próprio do degrau e da guarda, e sobrecarga uniformemente distribuída de 3 kN/m . Despreza-se, portanto, o efeito de flexão dupla por virtude de não serem, respectivamente, vertical e horizontal os eixos principais de inércia da secção de um degrau, tal como se, por exemplo, em lugar de uma forma trapezoidal ela fosse em L. Pode haver indeterminação na largura b_0 a tomar, se o valor de $b_1 = 5,3$ cm for um valor um pouco maior, por exemplo o equivalente à largura $b_0 = 9,0$ cm (Fig.7.31a) de um rectângulo fictício com o centro de gravidade G coincidente com o do trapézio. E isto porque, dado o valor reduzido das cargas e vãos, é suficiente uma aproximação que dispense a determinação da posição real da linha neutra.

Na Fig.7.31 está representada a posição do centro de gravidade das secções de encastramento, média e extrema de um degrau, donde se conclui que a linha dos centros de gravidade coincide muito aproximadamente com a linha de eixo (em planta) do cobertor de um degrau.

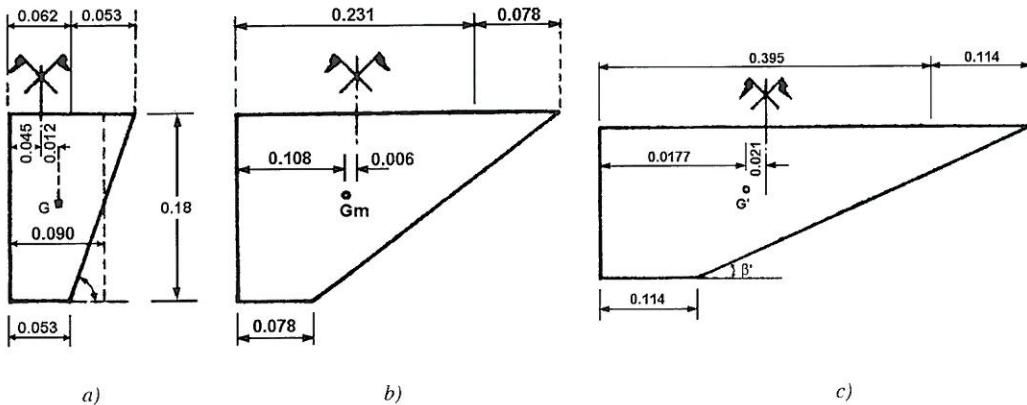


Fig. 7.31 - Posição do centro de gravidade das secções de encastramento, médio e livre de um degrau, em relação à linha média, em planta, dos mesmos degraus.

A posição do centro de gravidade, na secção de encastramento é

$$\frac{5,3}{2} + \frac{6,7}{6} + \frac{2(6,7 + 5,3) + 5,3}{(6,7 + 5,3) + 5,3} = 2,65 + 1,89 = 4,5 \text{ cm}$$

e, de modo idêntico 10,8 cm na secção média e 17,7 cm na secção extrema (ver Fig.7.31).

O peso do trecho de guarda sobre um degrau é $0,395 \times 0,08 \times 0,85 \times 25 = 0,67$ kN

A partir das cargas a ter em conta sobre cada degrau e do respectivo vão, determinamos o momento flector por degrau, a que corresponde a armadura $2 \text{ } \varnothing 8$

LAJES E ESCADAS DE BETÃO ARMADO

(1,00 cm²) tendo em conta as dimensões da secção de encastramento referido (rectângulo 9 cm x 18 cm).

Além desta armadura resistente, há que prever uma armadura de distribuição (perimétrica, isto é, disposta segundo a hélice) e armaduras parciais dirigidas radialmente para efeito de cobrir a área mais larga dos degraus com armaduras afastadas eixo a eixo não mais de 0,15 m.

Essa armadura de distribuição, considerando a secção média dos degraus, é:

$$\frac{1}{4} \frac{100}{23,1} \times 0,65 = 0,70 \text{cm}^2 - 4\text{Ø}6 \quad (1,13 \text{cm}^2)$$

d) Esforços e armaduras do pilar central .

As acções a considerar são $g = 46 \text{ kN/m}$, de acordo com o atrás indicado.

O momento flector característico máximo no trecho do pilar, em consola, que se situa na parte mais alta da escada, verifica-se na secção 1,35m a contar do extremo superior.

Assim, temos

$$M_{(g+q)k} = 0,667(3,8 + 3,0)0,96^3 = 4,01 \text{ kN.m}$$

e o esforço normal N_k característico é

$$N_k = \frac{0,5}{7,5} \times 181,8 + \frac{\pi}{2} \frac{1,76^2}{4} \times 3,00 = 15,77 \text{ kN.}$$

Este último esforço é calculado através da soma de duas parcelas, peso de meio passo (avaliado a partir do peso da escada com 7,5 passos) e sobrecarga actuante em meio passo. A armadura que lhe corresponde é 6 Ø 10mm.

Segue-se a determinação do momento flector máximo que se verifica a cerca de meia altura do trecho inferior, que se supõe apoiado nos extremos e com 5 passos. Portanto, o momento flector máximo verifica-se à altura de 2,5 passos a contar da base. Consideramos que a actuação da sobrecarga na pior hipótese é muito excepcional.

Adopta-se, como anteriormente, 6 Ø 10mm para armadura longitudinal.

Finalmente, a secção da base é calculada para $M = 0$ e para o esforço normal que corresponde à actuação da sobrecarga em dois passos. A secção é calculada à compressão



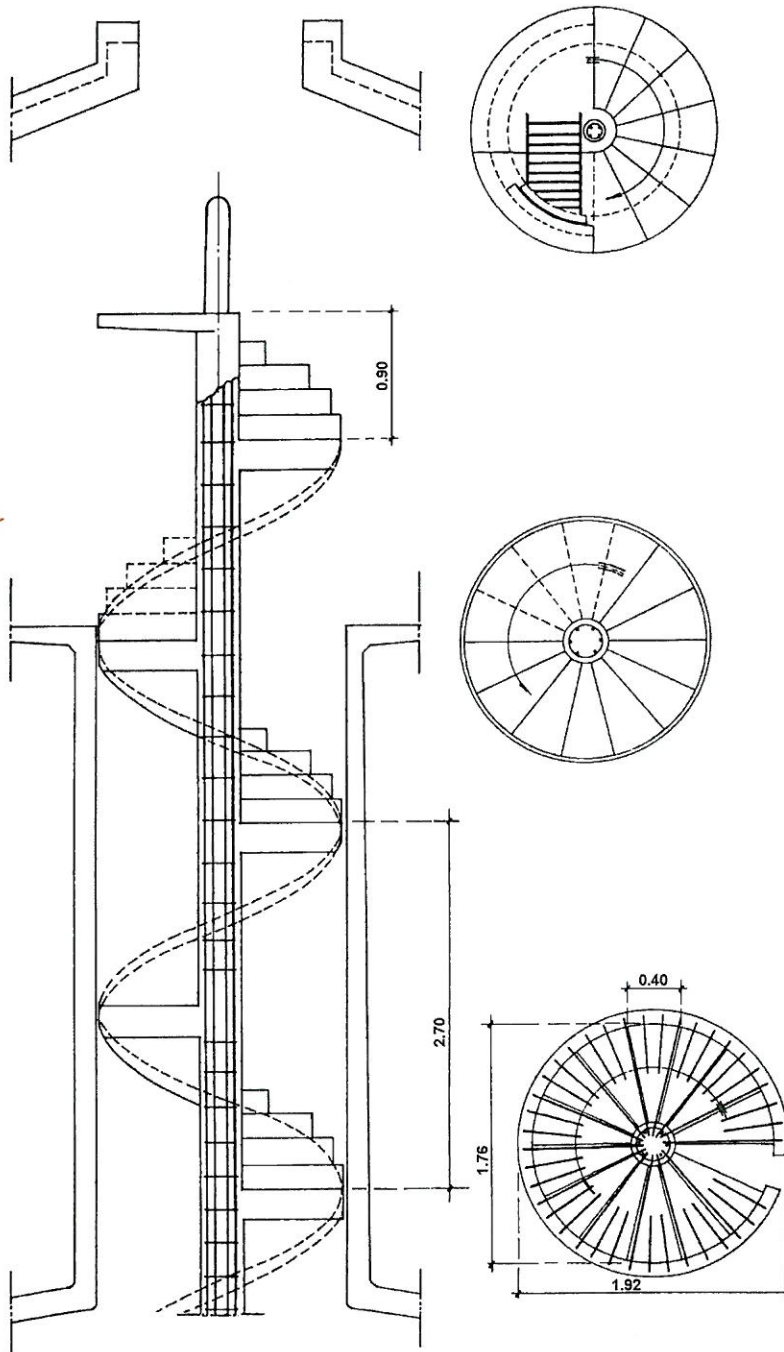


Fig. 7.32 - Pormenor de construção duma escada em caracol (exemplo 7.4). Trecho superior da escada, adjacente à chaminé central do reservatório

simples, considerando o passo com comprimento de varejamento = 2,70m, o que conduz à mesma armadura.

Portanto, a armadura será constituída, em toda a altura do pilar, por 6 Ø 10 e cintas Ø 6 afastadas 12cm. Pelo cálculo efectuado, verifica-se que o diâmetro do pilar, sob o aspecto da resistência, poderia ser reduzido para 20 cm, sendo o valor adoptado resultante de uma vantagem prática, relacionada com a facilidade de moldagem de pilares com diâmetro de 30 cm.

As disposições construtivas constam das Fig.7.31 e 7.33.

e) Moldes (*)

São de madeira os moldes para a execução do pilar central, dos degraus e da parede de guarda, apoiando-se o conjunto numa estrutura constituída por tubos metálicos de andaime, conforme Fig.7.34.

Esta estrutura é formada por elementos verticais, em número de sete, travados por elementos horizontais.

O molde do pilar é constituído por tabuado ao alto (moldura trabalhada à tupia), solidarizado por elementos horizontais de travamento, executados com tábuas de solho ligadas entre si, em cada nó, por parafusos (Fig.7.35).

O molde do fundo dos degraus é constituído por pranchas de 6 cm de grosso, serradas em número de 3 por degrau, com o perfil indicado nos desenhos, as quais se apoiam, de um lado, no molde do pilar - sendo pregadas a este de cima para baixo - e no extremo oposto as pranchas apoiam o molde exterior da guarda sendo a esta pregadas de baixo para cima.

Os moldes dos espelhos dos degraus são constituídos por tábuas de solho dispostas de perfil, solidarizadas entre si pelo elemento de travamento representado nas figuras.

Num dos extremos, estas tábuas topejam no molde do pilar (ao qual são pregadas de lado) e, no outro extremo, topejam no molde inferior da guarda da escada, ao qual são igualmente pregados de lado, de modo a facilitar a desmoldagem.

Os moldes da guarda da escada são constituídos por dois taipais (um interior, outro exterior), formados por tábuas de solho verticais, em número de 4 por degrau, a fim de inscrever bem a forma da guarda. Ambos são solidarizados por tábuas com o corte da hélice, que se ligam por meio de pregos aos moldes da guarda, no sentido do interior da guarda para fora desta. As diferentes tábuas que constituem estes travamentos são, por sua vez, ligadas umas às outras por pregos verticais, conforme se indica nas figuras. Os dois taipais são solidarizados na base por um taco funcionando de distanciador, na

(*) J. Paz Branco "Obras de Madeira em Tosco e Limpo na Construção Civil", publicação n° 8 desta colecção.

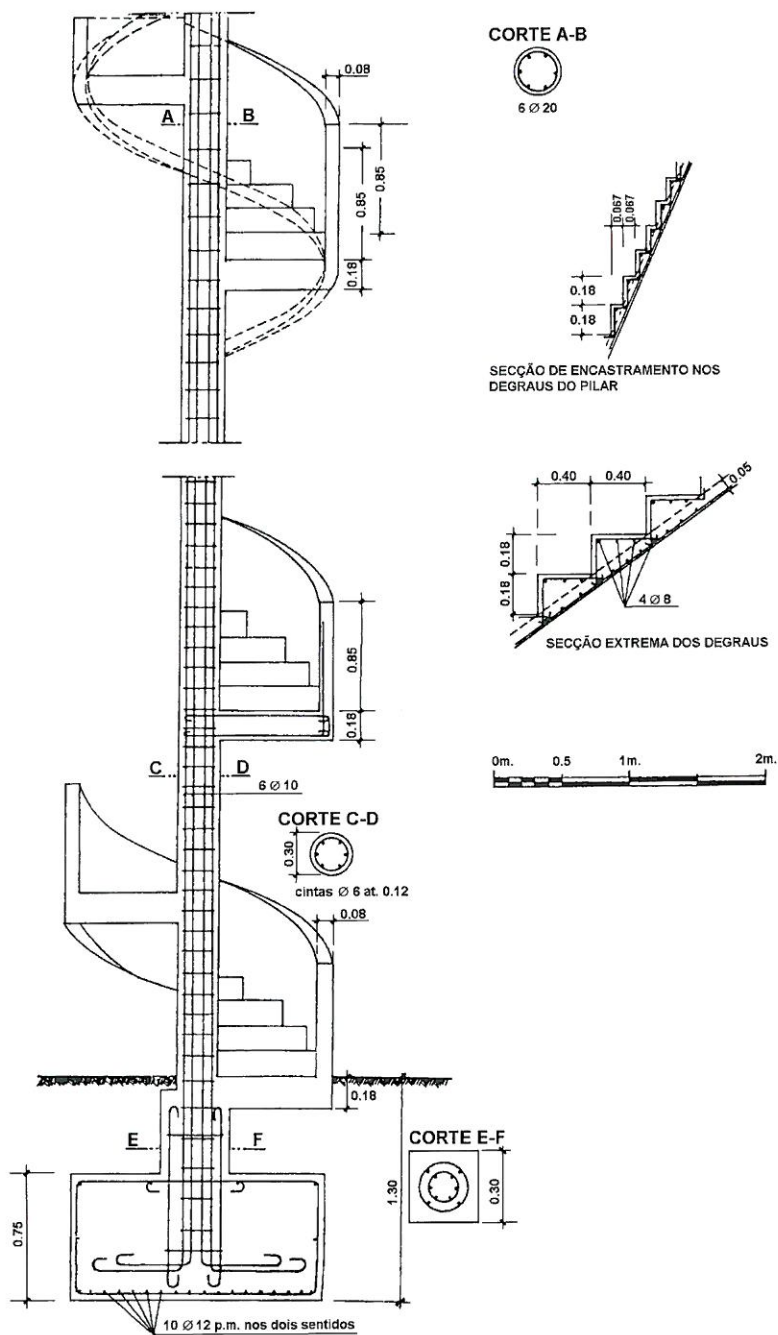


Fig. 7.33 - Pormenor de construção duma escada em caracol (exemplo 7.4). Trecho médio e inferior.

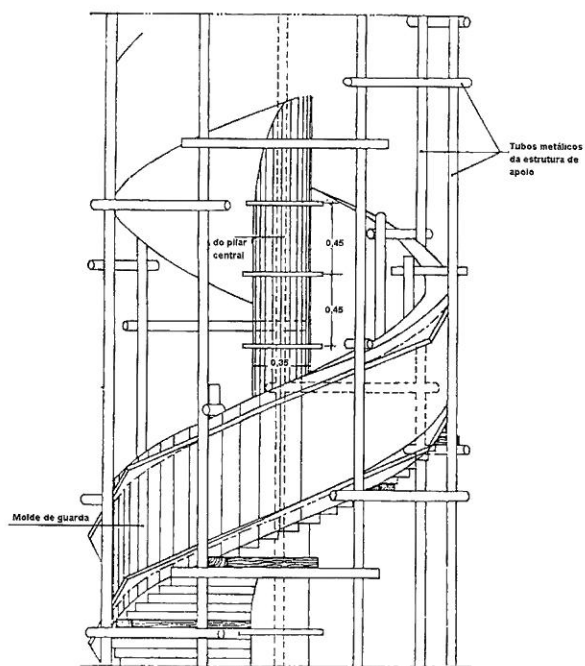
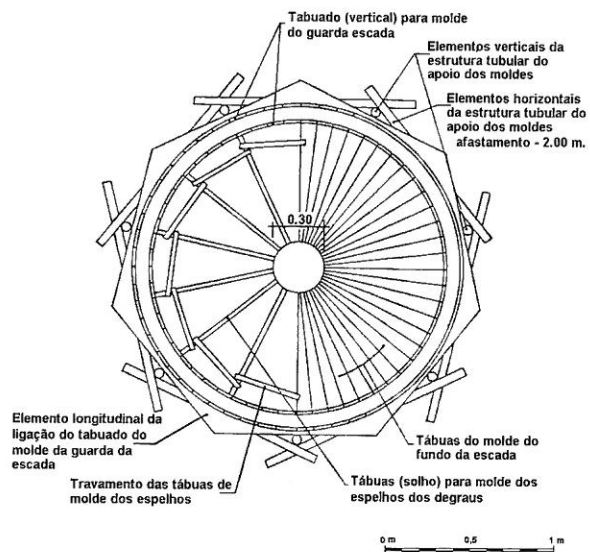
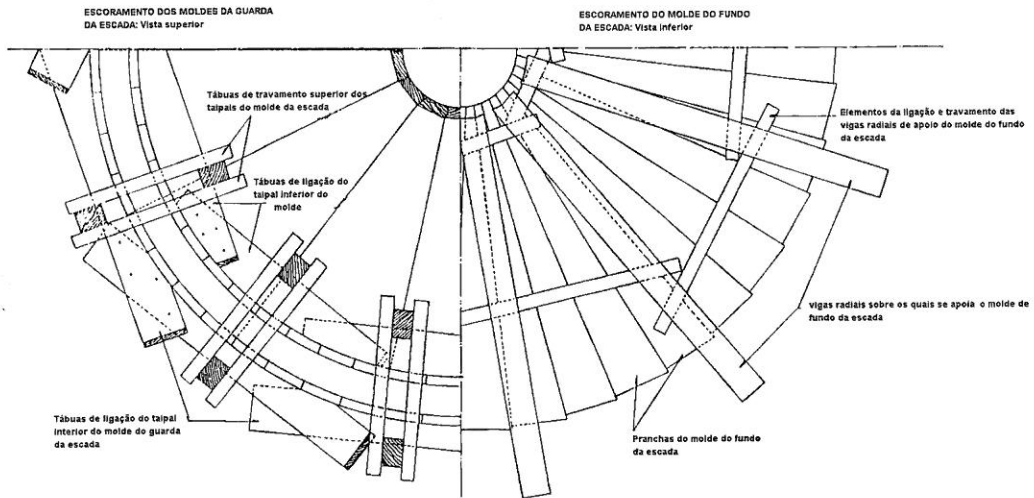
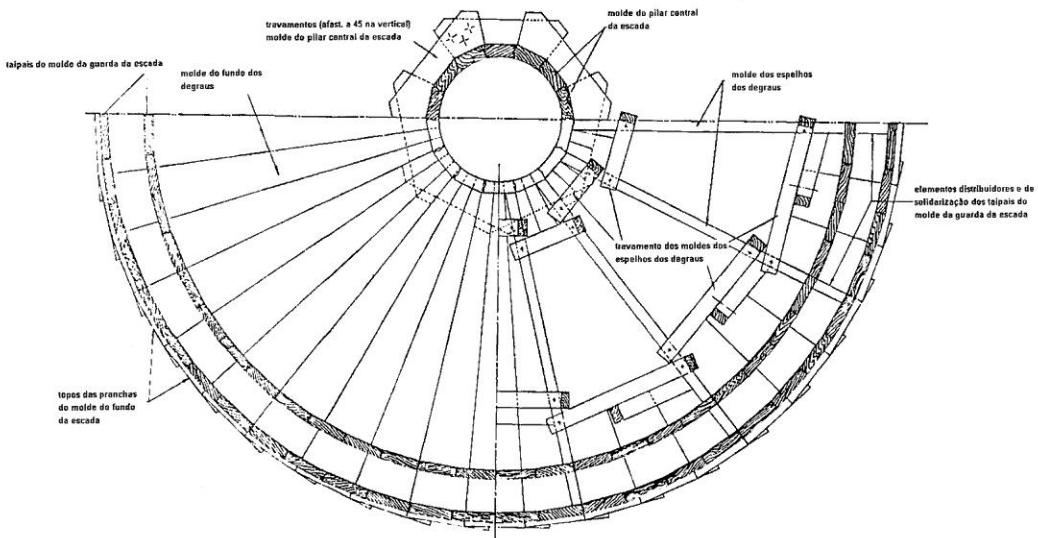


Fig. 7.34 - Elementos de apoio e de constituição dos moldes da escada

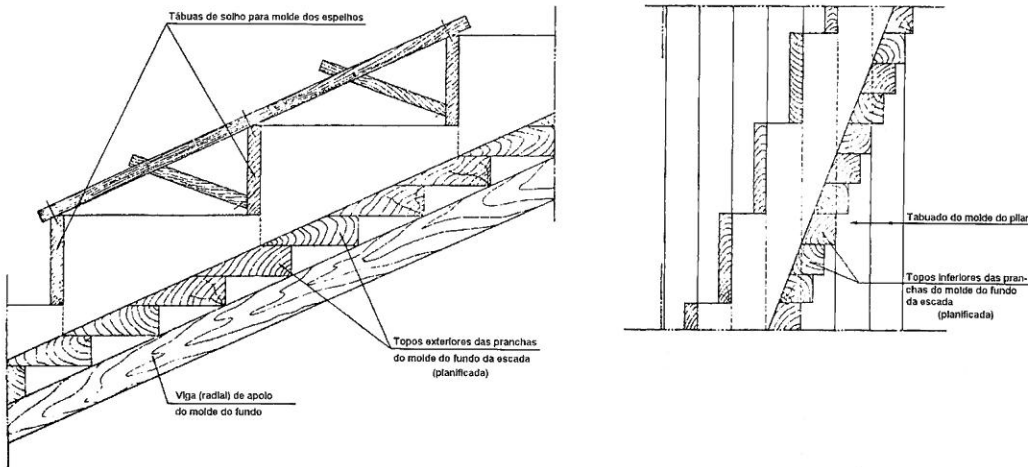


a)



b)

Fig. 7.35 - Pormenores relativos ao molde da escada



c)

Fig. 7.35 - Pormenores relativos ao molde da escada

correspondência dos moldes dos espelhos, para dar maior firmeza ao conjunto. Deste modo, após a desmoldagem da escada vão aparecer vazios no betão da guarda, correspondentes às dimensões transversais do taco, que terão que ser preenchidos com argamassa, operando do lado interior e exterior da escada. Além do referido, os taipais são ligados entre si, na parte superior, por duas tábuas, em conjuntos radiais, conforme Fig. 7.34; cada par destas tábuas abraçam dois prumos verticais, cuja altura é um pouco maior do que a altura de um passo, e a eles são pregados por um meio de pregos horizontais.

Exemplo 7.5 -Escada de caracol de cinco passos, conforme Fig.7.36, de acesso a um edifício constituído por loja e três andares de habitação. O pilar central apoia-se na fundação e na laje de cobertura de edifício, sendo os degraus constituídos por elementos pré-fabricados, com a altura de 8,5 cm e com um anel para moldagem do pilar central da escada, e que são assentes já acabados.

A escada tem uma guarda metálica e patamares à altura dos pisos das habitações. As características da escada são as seguintes:

altura do pilar	19	m
diâmetro do núcleo resistente do pilar	0,25	m
comprimento dos degraus	0,935	m
passo da hélice	3,40	m
número de passos	5	
altura de um degrau	0,17	m
número de degraus por passo	20	
número de degraus	93	



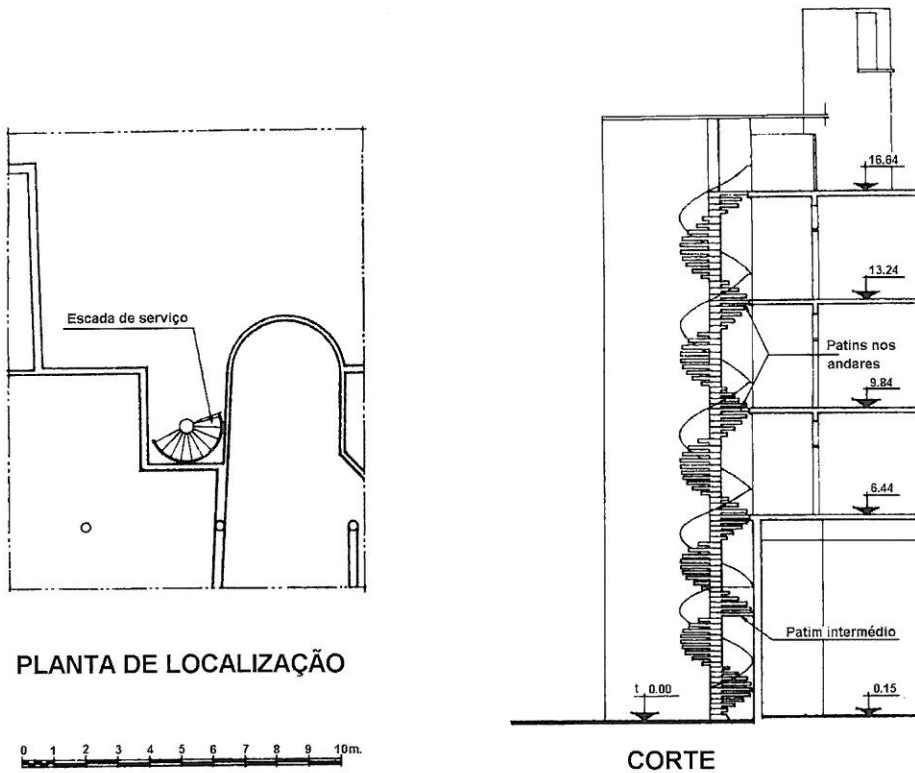


Fig. 7.36 - Escada de serviço num prédio de habitação (exemplo 7.5)

a) Dimensionamento dos degraus

Peso de um degrau, incluindo o anel:

$$\frac{0,45 + 0,37}{2} \times 0,950 \times 0,085 \times 25 = 0,85 \text{ kN}$$

$$(5^2 - 0,125^2) \times 0,17 \times 25,0 = \frac{0,25}{1,10} \text{ kN}$$

Ação característica uniformemente distribuída, por degrau

$$g + q = 0,085 \times 25 + 3 = 5,15 \text{ kN / m}^2$$

Momento flector característico tendo em conta o peso da guarda:

$$M_k = 5,15 \frac{0,4 + 0,32}{2} \times 0,5 + 0,50 \times 1,0 = 1,43 \text{ kN.m}, \text{ a que corresponde a arma-}$$

LAJES E ESCADAS DE BETÃO ARMADO

dura resistente de $4\varnothing 8$ ($2,01 \text{ cm}^2$) e a armadura de distribuição de $5\varnothing 6$ por degrau ($1,41 \text{ cm}^2$).

b) Dimensionamento dos patins

Os patins são constituídos por trechos de lajes de largura variável que se apoiam nas lajes do piso do edifício (com interposição de um material betuminoso de forma a criar uma junta) e encastram no pilar da escada. Estes patins estão sujeitos a uma carga uniformemente distribuída de $5,15 \text{ kN/m}^2$, tal como os degraus, mas, devido à forma irregular do patim em planta, no bordo da laje actua uma carga que se pode considerar uniformemente distribuída de

$$5,15 \times 1,25 \times 1,0 = 6,50 \text{ kN/m}$$

menos uma triangular incompleta de

$$5,15 (1,26 - 0,52) \times 1,0 = 3,80 \text{ kN/m}$$

a qual tem o vértice a $0,16 \text{ m}$ do apoio no edifício. Considera-se ainda uma carga concentrada de $1,0 \text{ KN}$ referente às guardas de um e de outro lado.

Assim, o momento no apoio de encastramento é

$$M_k = \frac{6,50 \times 1,1^2}{8} - \frac{3,80 \times 0,94^2}{120 \times 1,1^2} \times (8 \times 1,1^2 + 9 \times 0,16 + 1,1 \times 0,92^2) + \frac{3 \times 1,0 \times 1,1}{16} = 0,99 - 0,023 \times 13,7 + 0,21 = 0,90 \text{ kN.m}$$

e a meio vão, considerando um apoio simples e sem a carga triangular,

$$M = 0,98 + \frac{1,0 \times 1,1}{4} = 1,2 \text{ kN.m}$$

Sendo qualquer destes valores inferior ao momento actuante nos degraus, o patamar será armado de forma idêntica àqueles.

c) Dimensionamento do pilar

Para $g = 2,15 \text{ kN/m}^2$ e $q = 3,0 \text{ kN/m}^2$, temos aproximadamente na secção superior do pilar:

$$N = 0 \\ M = (0,667 \times 2,15 + 0,933 \times 3,0) \times 1,12 = 6,0 \text{ kN.m}$$

Utilizamos 6Ø12 (6,78 cm²).

Na secção da base é

$$M_k = 0$$

$$N_k = 0,93 + \left(1,1 + \frac{0,45 + 0,37}{2} \times 0,95 \times 3,0 \right) + 8,0 + \\ + \frac{\times 0,25^2}{4} \times 19,0 \times 25,0 \times = 25,0 \text{ kN}$$

considerando ser de 8,0 kN o peso dos patamares e da guarda.

Na secção de momento máximo

$$N_k = 113 \text{ kN e}$$

$$M_k = (0,667 \times 2,15 + 2,0 \times 3,0) \times 10,4 = 77,3 \text{ kN.m.}$$

Em todas estas secções satisfaz por excesso, a armadura constituída por 6Ø12 (6,78 cm²).

Na Fig. 7.38 apresentam-se as disposições construtivas relativas às armaduras dos vários elementos da escada.

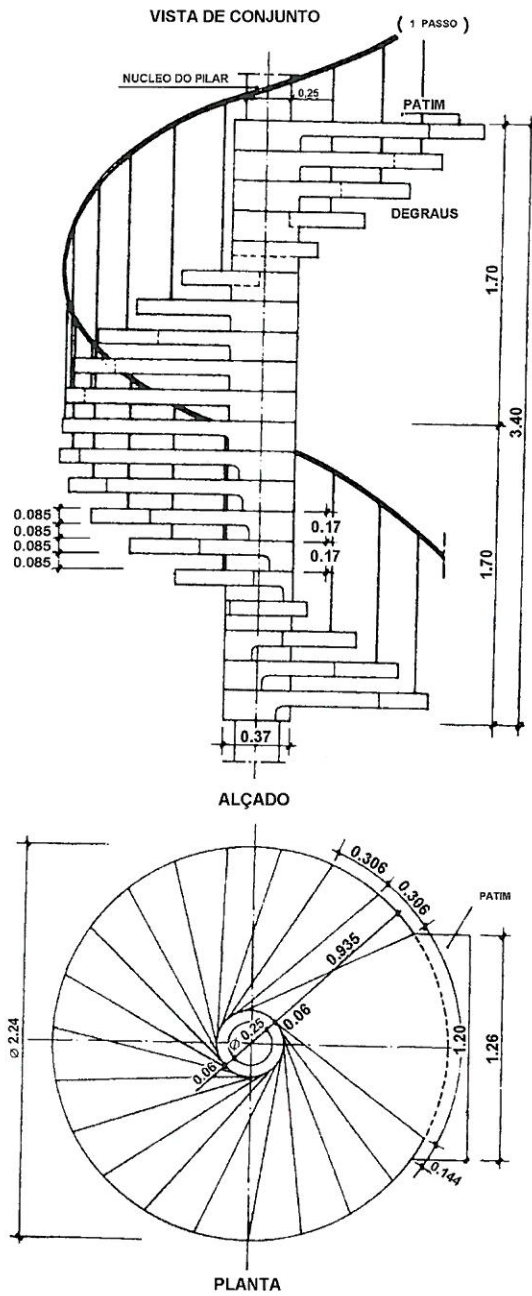


Fig. 7.37 - Características geométricas da escada (exemplo 7.5)

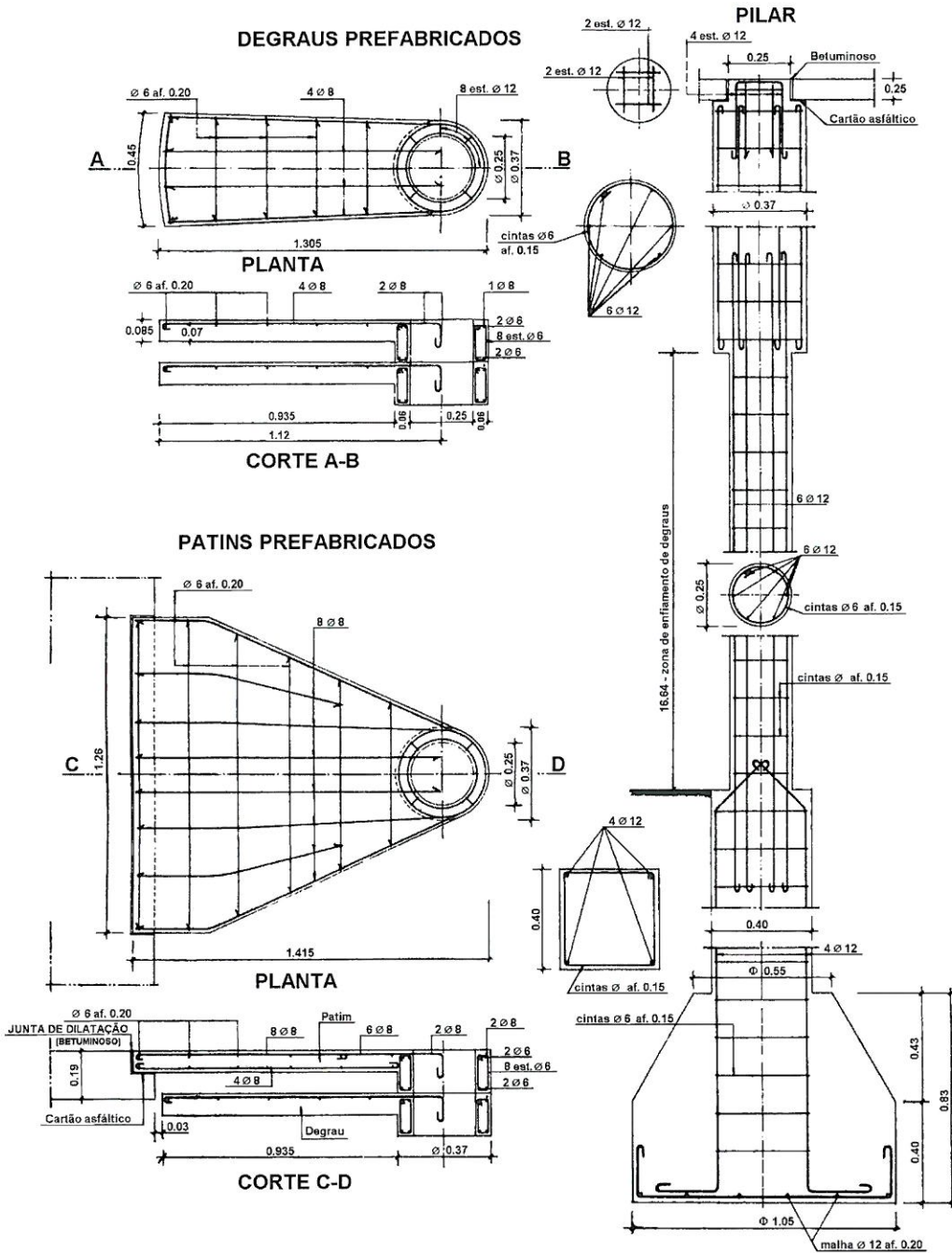


Fig. 7.38 - Disposição das armaduras na escada (exemplo 7.5)

BIBLIOGRAFIA

- Cusens, A.R. - "Analysis of Slabless Stairs", Corrent & Conctructional Engineering", Outubro 1996.
- Farinha, J.S.Brazão - "Escadas Aligeiradas de Lanços Rectos", separata da Revista "Fomento", Lisboa, Setembro 1971.
- Farinha, J.S.Brazão - "Viga de Eixo Ortoquebrado de Apoios Desnivelados", separata da Revista "Técnica", nº 414, Janeiro 1972, IST, Lisboa.
- Farinha, J.S.Brazão - "Escada em Caracol", separata da Revista "Engenho", Vol.33, nº2 e 3, Março/Setembro 1986, Lisboa.
- Gould, Phillips L. - "Analysis and Design of a Cantilever Staircase", Journal of the American Concrete Institute, Julho 1963.
- Saenz, L.P. e Martins, Ignacio - "Stabless Tread Riser Stairs", Jounal of the American Concrete Institute, Outubro 1961.
- Sauter, Franz - "Free - Standing Stairs", Journal of the American Concrete Institute, Julho 1964.



José Sidónio Brazão Farinha Engenheiro Civil (IST), iniciou a sua actividade profissional em grandes obras (barragens); trabalhou ainda como projectista (profissional liberal), mas a sua principal actividade decorreu no Metropolitano de Lisboa onde se reformou em 1991 como Director de Planeamento e Obras.

Dedicou boa parte da sua actuação à pedagogia de Engenharia Civil tendo exercido funções docentes no ISEL (1972-1990) (onde foi um dos fundadores do Centro de Estudos de Engenharia Civil) e IST.

Organizou e coordenou inúmeros cursos de formação permanente através do LNEC, INII e SISMET. Organizou textos dos cursos académicos em que actuou e dos cursos de actualização que leccionou, sendo ainda autor de numerosos trabalhos divulgados em artigos de revista e outros publicados em livro de onde se destacam *Manual de Estruturas*, *Tabelas de Betão Armado*, *Tabelas Técnicas* e nesta colecção *RSA Anotado*. Presentemente além de actividades de consultoria dedica-se à elaboração de textos técnicos.

Pretende esta publicação apresentar uma sistematização no domínio da determinação dos esforços nas lajes de betão armado, incluindo as rampas e as lajes das escadas, que constituem o 1º volume da obra.

As escadas formam elementos estruturais de que se pode tirar partido, adoptando novas formas, por vezes arrojadas, no sentido da valorização das construções.

A apresentação do problema das escadas de betão armado é abordada em duas partes:

- e - escadas correntes
- escadas especiais

com base na teoria das barras prismáticas, de dimensão longitudinal predominante relativamente às dimensões da secção transversal.

Na primeira parte referem-se as questões que norteiam correntemente a concepção estrutural, salientando a importância da coordenação do processo construtivo com a análise estrutural.

Na segunda parte apresentam-se três tipos de escadas especiais cuja análise é aprofundada exhaustivamente.

No 2º volume apresentar-se-ão tabelas de coeficientes para determinação dos esforços nas lajes rectangulares apoiadas total ou parcialmente no seu contorno ou em apoios pontuais, tendo em consideração os métodos elástico e à ruptura, de abordagem dos problemas de dimensionamento das placas.

O texto é acompanhado de formulário e exemplos de aplicação no sentido de facilitar a expedita compreensão do texto.

